Données de Panel

-> Déf : données qui combinent à la fois
- des effets temporels : t
- des données cross-sectionnelles : i

en général : beaucoup de i, peu de t + hétérogénéité entre les i

-> 1ère solution : suppression d'une des dim. dimension
- -> moyenne dans le temps
- -> ratio / taux de croissance cross-sectionnel

-> Modèle de base : $y_{it} = \alpha_i + \beta' x_{it} + \varepsilon_{it}$ $\quad$ T périodes, n individus

K regresseurs dans $x_{i,t}$ (sans compter α_i)

α_i : constant dans le temps
propre à chaque individu

si α_i identique pour chaque : OLS | consistant, efficient (pooled least squares)

si α_i spécifique
- -> soit effet fixe : α_i spécifique constant
- -> soit effet aléatoire : α_i = bruit aléatoire spécifique à i mais identique sur toute la période

1. Modèle à effet fixe

$\underset{T\times 1}{y_i}, \underset{T\times K}{X_i}$: T observations pour i

$\underset{T\times 1}{\varepsilon_i}$: T bruits pour i

$$\underset{T\times 1}{\bar{y}_i} = \underset{T\times 1}{\bar{i}}\,\alpha_i + \underset{T\times k}{\bar{\bar{X}}_i}\,\underset{k\times 1}{\bar{\beta}} + \underset{T\times 1}{\bar{\varepsilon}_i} \qquad \text{Pour chaque } i$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i} & & \bar{0} \\ & \ddots & \\ \bar{0} & & \bar{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\bar{X}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\bar{X}}_n \end{bmatrix} \bar{\beta} + \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_n \end{bmatrix} \qquad \text{Pour tous les } i$$

$$\underset{nT\times 1}{\bar{y}} = \underset{nT\times n}{\bar{\bar{D}}}\,\underset{n\times 1}{\bar{\alpha}} + \underset{nT\times k}{\bar{\bar{X}}}\,\underset{k\times 1}{\bar{\beta}} + \underset{nT\times 1}{\bar{\varepsilon}}$$

] Least Squares Dummy Variable Model

(2)

$\Rightarrow$ Modèle de régression classique : OLS

K régresseurs dans X

n colonnes dans D

si n grand : big problème d'estimation car $n+K$ régresseurs et $\hat{\beta}_{OLS} = \underset{(n+K)(n+K)}{(X'X)^{-1}} X'y$

Solution : p231 : régression partitionnée

Si $y = X\beta + \varepsilon = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + \varepsilon$

alors 1- $b_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1$ si $X_1'X_2 = 0$

2- $b_1 = (X_1'X_1)^{-1}X_1'(y - \underbrace{X_2 b_2}_{\text{correction pour tenir compte de } X_1'X_2})$ si $X_1' X_2 \neq 0$

3- $b_2 = (X_2' M_1 X_2)^{-1}(X_2' M_1 y)$

où $M_1 = [I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1']$

Rappel sur M

$y = Xb + e$

$e = y - X(X'X)^{-1}X'y$

$e = [I - (X'X)^{-1}X']y$

M -> produit e à partir de y
-> idempotente

$\Rightarrow b = [X'M_d X]^{-1}(X'M_d y)$ (*) (14-4)

$M_d = I - D(D'D)^{-1}D'$

$= \begin{bmatrix} M^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M^0 \end{bmatrix}$ et $\underset{T\times T}{M^0} = I_T - \frac{1}{T}ii'$

$= \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{T} & \cdots & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & \ddots & \\ \vdots & & 1-\frac{1}{T} \end{bmatrix}$

et $\underset{nT\times n}{D} = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & i & 0 & \\ 0 & 0 & i & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \underset{n \times n}{D'D} = \begin{bmatrix} \bar{\iota}'\bar{\iota} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\iota}'\bar{\iota} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{1 \times T}{\bar{\iota}'} \underset{T \times 1}{\bar{\iota}} = [1 \dots 1] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = T$$

$$\Rightarrow \underset{n \times n}{(D'D)^{-1}} = \begin{bmatrix} 1/T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/T \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{D \; (D'D)^{-1}}_{nT \times n} = \begin{bmatrix} \bar{\iota} & \bar{0} & \dots \\ \bar{0} & \bar{\iota} & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/T & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\bar{\iota}}{T} & \bar{0} & \dots \\ \bar{0} & \bar{\iota}/T & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{D \, (D'D)^{-1}}_{nT \times n} \underbrace{D'}_{n \times nT}}_{nT \times nT} = \begin{bmatrix} \bar{\iota}/T & \bar{0} & \dots \\ \bar{0} & \bar{\iota}/T & \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\iota}' & \bar{0}' & \dots \\ \bar{0}' & \bar{\iota}' & \dots \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\bar{\iota}\bar{\iota}'}{T} & \bar{0} & \dots \\ \bar{0} & \frac{\bar{\iota}\bar{\iota}'}{T} & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow I - D(D'D)^{-1}D' =$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & \\ & \ddots \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{\iota}\bar{\iota}'/T & \bar{0} & \dots \\ \bar{0} & \bar{\iota}\bar{\iota}'/T & \\ \vdots & & \end{bmatrix} =$$

I_T

$$\begin{bmatrix} I_T - \bar{\iota}\bar{\iota}'/T & \bar{0} & \dots \\ \bar{0} & I_T - \bar{\iota}\bar{\iota}'/T & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M^0 \end{bmatrix}$$

Sachant que M^0 est la matrice de centrage :

$$M^0 z_i = \left[I_T - \frac{1}{T}\, i\, i'\right] z_i$$

si $T = 3$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] z_i$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{T} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right] z_i$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} \\ -\frac{1}{T} & -\frac{1}{T} & 1-\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{i,1} \\ z_{i,2} \\ z_{i,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-\frac{1}{T}) z_{i,1} - \frac{1}{T} z_{i,2} - \frac{1}{T} z_{i,3} \\ + \frac{1}{T} z_{i,1} + (1-\frac{1}{T}) z_{i,2} - \frac{1}{T} z_{i,3} \\ - \frac{1}{T} z_{i,1} + \frac{1}{T} z_{i,2} + (1-\frac{1}{T}) z_{i,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z_{i,1} - \bar{z}_i \\ z_{i,2} - \bar{z}_i \\ z_{i,3} - \bar{z}_i \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow$ regression $M_d\, y$ sur $M_d\, X$ (cfr $*$)

= regression $[y_{it} - \bar{y}_{i.}]$ sur $[X_{it} - \bar{X}_{i.}]$

où $\bar{y}_{i.}$ et $\bar{x}_{i.}$ sont les moyennes par t.

NB : $M_d\, y = \begin{bmatrix} M^0 & 0 & \cdots \\ 0 & M^0 & \cdots \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^0 y_1 \\ M^0 y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

et $a_i = \bar{y}_{i.} - b' \bar{x}_{i.}$ (cfr $y = a + Xb + e$

$E(y) = a + E(x)\, b + \underbrace{E(e)}_{=0}$

$a = E(y) - E(x)\, b$).

Estimation de la variance : (intuitif mais pas démontré)

$$\text{Est Var}(b) = s^2 (X' \Pi_0 X)^{-1}$$

avec $$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} (y_{it} - a_i - \bar{x}'_{it} \bar{b})^2}{\underbrace{nT}_{\#\ \text{obs}} - \underbrace{n - K}_{\#\ \text{param}}}$$

$$\text{Est Var}(a_i) = \frac{\sigma^2}{T} + \bar{x}_{i.}' \ \text{Var}(b)\ \bar{x}_{i.}$$

4 points :

- Within / Between regroup : à voir -> lien avec la décomposition de la variance inter / intra
- Unbalanced panel : pas le même nombre d'obs par période
- Test de la significativité d'un effet de groupe
  -> tous les α_i sont-ils égaux ?

$$F(n-1, \overset{\text{df}}{nT-n-K}) = \frac{R_U^2 - R_P^2 / n-1}{(1-R_U^2) / (nT-n-K)} \overset{?}{=} \frac{\dfrac{e_P^{*\prime} e_P^{*} - e_U' e_U}{n-1}}{s^2 \left[\dfrac{e_U' e_U}{nT-n-K} \right.}$$

$\downarrow$ Jconstruction

- Fixed Time and Group Effects :

$$y_{it} = \alpha_i + \gamma_t + \beta' X_{it} + \varepsilon_{it}$$

$\downarrow$ T-1 Dummy variable $D^t = 1$ si $T = 1$
estimation pas un problème
(cf p 565)

2. Modèle à effet aléatoire

$$y_{it} = \alpha + \bar{\beta}' \bar{x}_{it} + u_i + \varepsilon_{it}$$

$\uparrow$ effet aléatoire.

↳ modèle à effet fixe n'est raisonnable que "si - complet"

Ex : comparaison de pays où l'on prend en compte tous les pays

↳ si échantillon tiré d'une large population : c'est problématique

|→ inférence

|→ prévision : quel α_i pour un nouvel individu ?

⇒ modèle à effet aléatoire : cas intéressant !

II / Modèle à effet aléatoire

Pour commencer
- Hétéroscédasticité → white
- Autocorrélation
- Modèle dynamique $y_{i,t-1}, \dots$

Modèle de base :

$$y_{it} = \alpha + \beta' x_{it} + u_i + \varepsilon_{it}$$

→ effet aléatoire individuel

(>< $y_{it} = \alpha_i + \beta' x_{it} + \varepsilon_{it}$: α_i : effet fixe individuel)

Hyp :

$E(\varepsilon_{it}) = E(u_i) = 0$ espérance nulle

$E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_\varepsilon^2$ variance finie

$E(u_t^2) = \sigma_u^2$

$E(\varepsilon_{it} u_j) = 0$ $\forall t, i, j$ erreurs non corrélées

$E(\varepsilon_{it} \varepsilon_{js}) = 0$ si $t \neq s$ ou $i \neq j$: erreurs non corrélées entre les périodes / les individus

$E(u_i u_j) = 0$ si $i \neq j$: erreurs non corrélées entre les individus

Écriture des T équations :

$\underset{T\times 1}{\bar{y}_i}$, $\underset{T\times k}{\bar{\bar{X}}_i}$, $\underset{T\times 1}{\bar{u}_i \bar{i}}$, $\underset{T\times 1}{\bar{\varepsilon}_i}$ et $w_{it} = \varepsilon_{it} + u_i$

$$\bar{w}_i = \begin{bmatrix} w_{i1} \\ \vdots \\ w_{iT} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E(w_{it}^2) = \underbrace{E(\varepsilon_{it}^2)}_{\sigma_\varepsilon^2} + \underbrace{E(u_i^2)}_{\sigma_u^2} + 2\underbrace{E(\varepsilon_{it} u_i)}_{=0} = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2$$

$$E(w_{it} w_{is}) = E\big((\varepsilon_{it} + u_i)(\varepsilon_{is} + u_i)\big) =$$

$$\underbrace{E(\varepsilon_{it} \varepsilon_{is})}_{=0} + \underbrace{E(\varepsilon_{it} u_i)}_{=0} + \underbrace{E(u_i \varepsilon_{is})}_{=0} + \underbrace{E(u_i^2)}_{\sigma_u^2}$$

$$= \sigma_u^2$$

Pour i, pour les T observations :

$$\Omega = E(w_i w_i') = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2 & & \sigma_u^2 \\ & \ddots & \\ \sigma_u^2 & & \sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2\end{bmatrix} \\ T\times T\end{array}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 I_T + \sigma_u^2 \, i_T i_T'$$

V = matrice Var/Covar pour les n individus i =

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} \Omega & & & 0 \\ & \Omega & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Omega \end{bmatrix} \\ nT \times nT\end{array}$$ car i sont indépendants

$$= \underset{T\times T}{\Omega} \otimes \underset{n\times n}{I_n}$$

↳ produit de Kronecker → Matrice Bloc Diagonale.

GLS

- Rappel :

$$y = X\beta + \varepsilon$$
$$E(\varepsilon | X) = 0$$
$$E(\varepsilon\varepsilon' | X) = \sigma^2 \Omega \quad (\neq \sigma^2 I : \text{OLS efficient})$$

↳ GLS efficient.

$$\Omega = C \Lambda C'$$: décomposition spectrale

où C : vecteur propre colonne

Λ : Matrice diagonale de valeurs propres

↳ c'est possible car Ω est une matrice symétrique définie positive

NB $\quad C = [c_1 \cdots c_K] \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_K \end{bmatrix}$

avec $\quad A c_i = \lambda_i c_i$ (déf vecteur / valeur propres)

$\quad$ | pour les K équations

$$A C = C \Lambda$$

$$A = C \Lambda C^{-1}$$

de plus, comme $\quad c_i' c_i = 1$ et $c_i' c_j = 0 \quad (c_i \perp c_j)$

$$C'C = I \text{ et donc } C^{-1} = C'$$

$$A = C \Lambda C'$$

Si $\Lambda^{1/2}$ = matrice diagonale avec $\sqrt{\lambda_i}$ sur la diagonale principale et $T = C \Lambda^{1/2}$

$$\Rightarrow \Omega = TT' = C \Lambda^{1/2} \Lambda^{1/2'} C' = C \Lambda C'$$

Si $\quad P' = C \Lambda^{-1/2}$

$$\Rightarrow \Omega^{-1} = P'P = C \Lambda^{-1/2} \Lambda^{-1/2} C' = C \Lambda^{-1} C' = (C \Lambda C')^{-1}.$$

Alors. $\quad Py = PX\beta + P\varepsilon$

$\quad y_* = X_* \beta + \varepsilon_* \quad$: revient au cas standard

$\quad$ avec $E[\varepsilon_* \varepsilon_*'] = E[P\varepsilon\varepsilon'P'] = P \sigma^2 \Omega P' = \sigma^2 I$

$\quad$ car $\quad P \Omega P' = \cancel{\Lambda^{-1/2'}} \underbrace{\cancel{C'} \cancel{C} \cancel{\Lambda} \cancel{C'} \cancel{C} \cancel{\Lambda^{-1/2}}}_{I}$

et $\quad \hat{\beta} = (X_*' X_*)^{-1} X_*' y_*$

$\qquad = (X'P'PX)^{-1} X'P'Py$

$\qquad = (X'\Omega^{-1}X)^{-1} X'\Omega^{-1} y \quad$: efficient

- Application ① on cherche $P = V^{-1/2}$

$$V^{-1/2} = I \otimes \Omega^{-1/2}$$

comme $\Omega = \sigma_\varepsilon^2 I_T + \sigma_\upsilon^2 \, i_T i_T'$

$$\Omega^{-1/2} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \left[I - \frac{\theta}{T} i i' \right]$$

avec $\theta = 1 - \dfrac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{T \sigma_\upsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2}}$

) A montrer !...

② Transformation de y_i et X_i

$$\Omega^{-1/2} y_i = \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \begin{bmatrix} y_{i1} - \theta \bar{y}_i \\ \vdots \\ y_{iT} - \theta \bar{y}_i \end{bmatrix}$$

et idem sur les lignes de X_i

③ Estimation par OLS sur les données transformées

NB : si $\sigma_\upsilon^2 = 0$: cas OLS classique car

$$\theta = 1 - \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2}} = 0$$

et $\Omega^{-1/2} = \dfrac{1}{\sigma_\varepsilon} [I]$

FGLS Problème : Ω inconnu → application de GLS difficile (choix de θ)

!

Rappel : si on a un estimateur consistant de Ω ($\hat{\Omega} = \Omega(\hat{\theta})$) et que l'on utilise $\hat{\Omega}$ dans GLS :

$$\hat{\beta} = (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}y$$

$\Rightarrow \hat{\beta}$ efficient

Application : estimation consistante de Ω

$$y_{it} = \alpha + \beta' x_{it} + \varepsilon_{it} + u_i$$

$$\bar{y}_{i.} = \alpha + \beta'\bar{x}_{i.} + \bar{\varepsilon}_{i.} + u_i$$

1: σ_ε^2

$$\Rightarrow y_{it} - \bar{y}_{i.} = \beta'[x_{it} - \bar{x}_{i.}] + [\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_{i.}]$$

$$E\left[\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_{i.})^2\right] = (T-1)\sigma_\varepsilon^2$$ pour chaque individu i

correction de l'espérance

NB
$$E\left(\sum (x_i - \bar{x})^2\right) =$$
$$E\left(\sum (x_i - \mu + \mu - \bar{x})^2\right) =$$
$$E\left(\sum\left((x_i-\mu)^2 + (\mu-\bar{x})^2 + 2(x_i-\mu)(\mu-\bar{x})\right)\right) =$$
$$\underbrace{E\left(\sum (x_i-\mu)^2\right)}_{1} + \underbrace{E\left(\sum(\mu-\bar{x})^2\right)}_{2} +$$
$$\underbrace{E\left(\sum 2(x_i-\mu)(\mu-\bar{x})\right)}_{3} =$$

$E\left(\sum (x_i-\mu)^2\right) = \sum E(x_i-\mu)^2 = n\sigma_X^2$ ← (1) $= n\sigma_X^2$

$\dfrac{\sum E(x_i-\mu)^2}{\sigma_X^2}$

(2) $= n\sigma_{\bar{X}}^2 = n\dfrac{\sigma_X^2}{n} = \sigma_X^2$

car $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$

(3) $= E\left(2(\mu-\bar{x})\sum(x_i-\mu)\right) =$
$E\left(2(\mu-\bar{x})(\sum x_i - \sum\mu)\right) =$
$E\left(2(\mu-\bar{x})(n\bar{x} - n\mu)\right) =$
$E\left(2n(\mu-\bar{x})(\bar{x}-\mu)\right) =$

$$E\left(-2n\,(\mu-\bar{X})^2\right) = -2n\,\sigma^2_{\bar{X}} = -2\cancel{n}\,\frac{\sigma^2_X}{\cancel{n}} = -2\sigma^2_X$$

$$\Rightarrow \quad = n\sigma^2_X + \sigma^2_X - 2\sigma^2_X = n\sigma^2_X - \sigma^2_X = (n-1)\sigma^2_X$$

$\Rightarrow \beta$ observé : $\hat{\sigma}^2_\varepsilon(i) = \dfrac{\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_{it}-\bar{\varepsilon}_{i.})^2}{T-1}$: estimateur sans biais de σ^2_ε

Mais : β doit être estimé

→ estimation par 14-4 p 2. > est effet fixe

$$\Rightarrow \quad s^2_e(i) = \frac{\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i.})^2}{T-K-1}$$

↳ correction du # de dl pour l'estimation de β

On aboutit à n $s^2_e(i)$: n estimateurs de σ^2_e

⇒ on en prend la moyenne :

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i.})^2}{nT-n-K}$$

↳ on ne corrige qu'une seule fois pour K !

2° σ^2_v

$$\varepsilon_{**i} = \bar{y}_{i.} - \alpha - \beta'\bar{x}_{i.}$$

$$\bar{\varepsilon}_{i.} + v_i = \bar{y}_{i.} - \alpha - \beta'\bar{x}_{i.}$$

$$Var(\varepsilon_{**i}) = \sigma^2_{**} = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{T} + \sigma^2_v \qquad (v \text{ et } \varepsilon \perp)$$

! Variance d'une moyenne $\bar{\varepsilon}_{i.}$

$\Rightarrow$ 1/ $\hat{\sigma}^2_{**} = \dfrac{e'_{**}e_{**}}{n-K}$: estimation obtenue par regression sur les moyennes de groupe

2/ $\hat{\sigma}^2_{**} = \dfrac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{T} + \sigma^2_{u}$

$\Rightarrow \quad \hat{\sigma}^2_{u} = \hat{\sigma}^2_{**} - \dfrac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{T}$