LE CALCUL ACTUARIEL

QUELQUES RAPPELS

La présentation faite dans ce document n'a d'autres ambitions que de fournir à l'étudiant quelques concepts indispensables dans le domaine du calcul actuariel. La présentation faite est souvent (abusivement) simplificatrice.

Intérêts simples / Intérêts composés

- Intérêts simples : le capital est placé de période en période, les intérêts sont perçus mais ne font pas l'objet d'un replacement
- Intérêts composé : le capital et les intérêts font l'objet d'un replacement

Accumulation / Actualisation

- Accumulation : procédure par laquelle on calcule la valeur future de francs perçus aujourd'hui
- Actualisation : procédure par laquelle on calcule la valeur actuelle (aujourd'hui) de francs perçus dans le futur

Actualisation en temps discret

Valeur future d'un montant perçu aujourd'hui

$$VF = VA \times (1+i)^t$$

où $(1+i)^t$ est appelé facteur d'accumulation

Valeur actuelle d'un montant perçu dans le futur

$$VA = VF_t \times \frac{1}{(1+i)^t}$$

où $\frac{1}{(1+i)^t}$ est appelé facteur d'actualisation

Périodicité différente de l'année

Si les intérêts sont perçus à une fréquence s (s fois par an), la valeur future d'un montant perçu aujourd'hui devient :

$$VF_t = VA \times (1 + \frac{i}{s})^{st}$$

Le passage d'un taux en une fréquence m_1 de composition vers un taux en une fréquence m_2 de composition s'effectue par le raisonnement suivant :

$$A(1 + \frac{R_{m1}}{m1})^{m1n} = A(1 + \frac{R_{m2}}{m2})^{m2n}$$

$$R_{m2} = \left[\left(1 + \frac{R_{m_1}}{m_1} \right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1 \right] m_2$$

Valeur actuelle d'une perpétuité

Une perpétuité est un montant fixe perçu jusqu'à la fin des temps. Sa valeur actuelle se calcule comme suit :

$$VA = \frac{A}{(1+i)^1} + \frac{A}{(1+i)^2} + \ldots$$

Posons que $X = \frac{1}{(1+i)}$ et que $a = \frac{A}{(1+i)}$

alors

$$(1)\; VA = a(1 + X + X^2 + X^3 + \ldots)$$

$$(2) XVA = a(X + X^2 + X^3 + \ldots)$$

$$(1) - (2) VA(1 - X) = a$$

On en déduit en remplaçant a et X par leur valeur que :

$$VA = \frac{A}{i}$$

Valeur actuelle d'une annuité

La valeur actuelle d'une annuité est obtenue par la différence entre deux perpétuités perçues à des moments différents du temps :

Si $\frac{A}{i}$ est la valeur actuelle d'une perpétuité perçue aujourd'hui

et $\frac{A}{i} \times \frac{1}{(1+i)^t}$ est la valeur actuelle d'une perpétuité perçue en t,

la valeur actuelle d'une annuité est : $VA = \frac{A}{i} - \frac{A}{i} \times \frac{1}{(1+i)^t}$,

soit $VA = A\left[\frac{(1+i)^t - 1}{i(1+i)^t}\right] = A\left[\frac{1 - (1+i)^t}{i}\right]$

Pour la valeur future, il suffit d'accumuler le résultat sur t périodes (le multiplier par $(1+i)^t$).

Actualisation en temps continu

Le passage à l'actualisation en temps continu s'effectue par le calcul des valeurs actuelles et futures lorsque la périodicité de paiement des intérêts (notée s à la section précédante) tend vers l'infini :

Sachant que : $VF_t = VA \times (1 + \frac{i}{s})^{st}$

le passage à l'actualisation en temps continu est obtenu en faisant tendre s vers l'infini :

$$\lim_{s\to\infty} VF_t = \lim_{s\to\infty} VA \times (1 + \frac{i}{s})^{st}$$

Pour calculer cette limite, on procède comme suit :

$$VA \times (1 + \frac{i}{s})^{st} = \left[VA \times (1 + \frac{i}{s})^{\frac{s}{i}}\right]^{it}$$

et $m = s/i$

ce qui donne : $\left[VA \times (1 + \frac{1}{m})m\right]^{it}$

or la lim $\left[1 + \frac{1}{m}\right]^m$ lorsque m tend vers l'infini est e

$\Rightarrow VF_t = VAe^{it}$ et $VA = VF_t e^{-it}$

Partant des propriétés de l'exponentielle et du logarithme, on peut en déduire les relations suivantes :

- Le taux en composition continue équivalent au taux en composition discrète (avec m composition par période) est obtenu par le raisonnement suivant :

$$
\begin{aligned}
& Ae^{R_c n} = A(1+\frac{R_m}{m})^{mn} \\
& \Rightarrow e^{R_c} = (1+\frac{R_m}{m})^{m} \\
& \Rightarrow R_c = m\ln((1+\frac{R_m}{m})) \\
& et \\
& \Rightarrow R_m = m(e^{R_c/m} - 1)
\end{aligned}
$$

- La moyenne des taux de rendements en composition continue est leur moyenne arithmétique. Ainsi, si r^{01} est le taux entre la période 0 et la période 1, r^{12} est le taux entre la période 1 et la période 2, le taux composé sur deux période est r^{02} :

$$
\begin{aligned}
& VF\ é = \left(VAe^{r_{01}}\right)e^{r_{12}} = VAe^{r_{01}+r_{12}} \\
& \Rightarrow r_{02} = r_{01} + r_{12} \\
& et \\
& \Rightarrow \text{Le taux moyen est} : \frac{r_{01} + r_{12}}{2}
\end{aligned}
$$