Annexe 3 : L 'A.P.T.

- Partons d 'un modèle à deux facteurs :
  - Supposons que le processus générateur des rendements à la forme suivante :

$$R_i = a_i + b_{i1} I_1 + b_{i2} I_2 + e_i$$

  - Prenons-en l 'espérance :

$$\bar{R}_i = a_i + b_{i1} \bar{I}_1 + b_{i2} \bar{I}_2$$

  - et faisons la différence entre les deux :

$$R_i = \bar{R}_i + b_{i1}(I_1 - \bar{I}_1) + b_{i2}(I_2 - \bar{I}_2) + e_i$$

  - Formons un portefeuille aux caractéristiques suivantes :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 0$$ (le vecteur de Xi est orthogonal au vecteur des 1)

$$\sum_{i=1}^{N} X_i b_{i1} = 0$$ (le vecteur de Xi est orthogonal au vecteur des b_{1i})

$$\sum_{i=1}^{N} X_i b_{i1} = 0$$ (le vecteur de Xi est orthogonal au vecteur des b_{2i})

$$\sum_{i=1}^{N} X_i e_i \approx 0$$ (le risque résiduel doit être proche de 0. La première preuve de l 'APT était basée sur un nombre infini d 'actifs et des portefeuilles bien diversifiés)

  - Il s 'agit d 'un portefeuille sans rendement et sans risque. Son rendement doit être égal à 0 :

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i = 0$$

Elton et Gruber, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5°ed, Wiley, 1995

- Comme
  - les rendements espérés sont une combinaison linéaire des constantes, des b_{i1} et des b_{i2}
  - les X_i sont orthogonaux aux constantes, aux b_{i1} et aux b_{i2}
- On peut affirmer que le vecteur des X_i est orthogonal au vecteur des rendements espérés R_i
- Comme on peut prouver que si le fait qu 'un vecteur est orthogonal à N-1 vecteurs implique qu 'il soit orthogonal à un N° vecteur, alors le N° vecteur peut être exprimé comme une combinaison linéaire des N-1 vecteurs., on peut affirmer que le vecteur des R_i peut être exprimé comme une combinaison linéaire des constantes, des b_{i1} et des b_{i2} :

$$\overline{R}_i = l_0 + l_1 b_{i1} + l_2 b_{i2}$$

- Les λ peuvent évalués en formant trois portefeuilles aux caractéristiques suivantes :

$$1. b_{p1} = 0 \, et \, b_{p2} = 0$$

$$2. b_{p1} = 1 \, et \, b_{p2} = 0$$

$$3. b_{p1} = 0 \, et \, b_{p2} = 1$$

- On obtient :

$$\overline{R}_i = R_F + b_{i1}(\overline{R}_1 - R_F) + b_{i2}(\overline{R}_2 - R_F)$$

- résultat qui peut être généralisé à N facteurs.