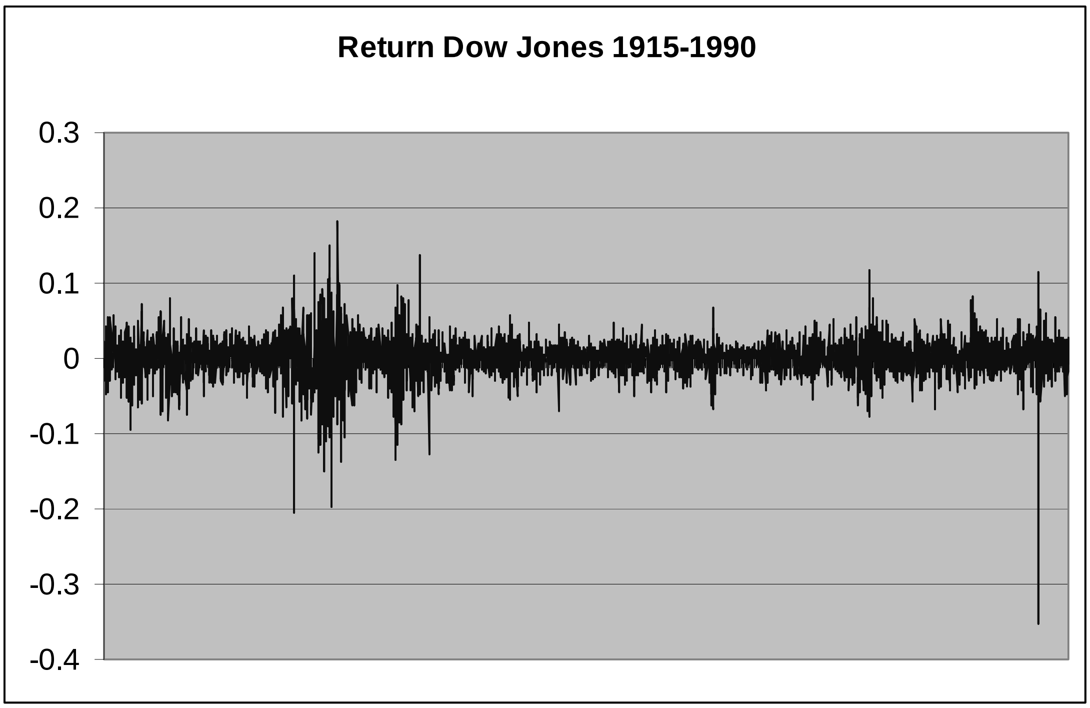
LES MODELES ARCH / GARCH
NOTE DE PRESENTATION

○ CONSTAT

Les séries financières sont caractérisées par des périodes d'agitation suivies de périodes de "relative" accalmie. Le graphique ci-dessous, qui reprend les taux de rentabilité du Dow Jones de 1915 à 1970, met clairement en évidence ce phénomène.



○ LE MODELE DE BASE : ARCH(1)

En 1982, R. Engle propose l'approche "AutoRegressive Conditionaly Heteroscedastic" pour modéliser ces phénomènes. Le modèle s'écrit de la manière suivante :

$$y_t = X'_t\,\beta + \varepsilon_t$$

et $\varepsilon_t = u_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2}$ avec α_0 *et* $\alpha_1 > 0$

où $X_t = \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ \\ x_{k,t} \end{bmatrix}$ et $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \\ \beta_k \end{bmatrix}$, u_t suit une *N(0,1)* et ε_t n'est plus IID (dépend de $\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$).

L'hypothèse classique des modèles de régression, $E(\varepsilon_t | X_t) = 0$, est conservée1.
Les propriétés de ce modèle sont :

1- $E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = E(u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2})$ = (ut est indépendant de $\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$) $E(u_t) E(\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}) = 0$

2- $E(\varepsilon_t)$ = (Law of Iterated Expectation2) $\underset{x}{E}[E(\varepsilon_t | x_t] = 0$

3- Variance conditionnelle : $Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1})$ =3 $E(\varepsilon_t^2 | \varepsilon_{t-1})$ = $E(u_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2))$ = (ut est indépendant de $\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}$, ε_{t-1}^2 étant connu en t et $E(u_t^2) = 1$) $\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$. : conditionnellement à εt-1, εt est hétéroscédastique.

4- Variance non-conditionnelle : $Var(\varepsilon_t)$ =4 $Var(E(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}))$ 5+ $E(Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}))$ = $E(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)$ = $\alpha_0 + \alpha_1 Var(\varepsilon_{t-1})$. Si , $Var(\varepsilon_t) = Var(\varepsilon_{t-1})$, condition nécessaire pour que la série soit stationnaire, $Var(\varepsilon_t) = \dfrac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$. Pour que la variance non-conditionnelle existe, il faut donc que α_0 soit inférieur à l'unité.

On notera également que l'utilisation de σ2t modifie les bornes des intervalles de confiance que l'on construit autour des prévisions.

---

[1] On notera que si $E(\varepsilon_t | X_t) = 0$,
$Cov(X_t, \varepsilon_t) = Cov(X_t, E(\varepsilon_t \mid X_t)) = Cov(X_t, 0) = 0$.

[2] $E(y) = E[\underset{x}{E}(Y | X)]$

[3] Il s'agit d'une application de $Var(y|x) = E(y^2|x) - (E(y|x))^2$

[4] Il s'agit cette fois d'une application de la decomposition de la variance :
$Var(y) = Var(E(y|x)) + E(Var(y|x))$

[5] Ce terme est ici égal à 0 (cfr propriété 1).

- **LES EXTENSIONS**

Le modèle ARCH(1) se généralise de manière quasi-naturelle à un modèle ARCH(p) de la forme suivante :

$y_t = X'_t \beta + \varepsilon_t$

et $\varepsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + ... + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2}$ avec α0, … αp >0

La variance non-conditionnelle est cette fois égale (sous hypothèse de stationnarité de la série) à $Var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1 + ... + \alpha_p)}$, ce qui implique (pour que la variance non-conditionnelle existe) que $(\alpha_1 + ... + \alpha_p) < 1$.

Bollerslev (86) a proposé une extension de modèle ARCH(p) de type GARCH(p,q) (G tient pour "Generalized"), qui est une forme de modèle ARMA sur la variance et qui se veut être une approche "économe" en nombre de paramètres pour modéliser les phénomènes de persistance des chocs de variance. Le modèle est le suivant :

$y_t = X'_t \beta + \varepsilon_t$

et $\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t}$ avec $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \delta_1 h_{t-1}$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la variance conditionnelle soit égale à 0 sont : α0, α1 et δ1 >0. Pour que la variance non-conditionnelle existe, il faut aussi que α0+δ1<1.

- **LA METHODE D'ESTIMATION**

Les modèles ARCH/GARCH sont classiquement estimés par maximum de vraisemblance. Si l'on suppose que les résidus sont gaussiens, la fonction de vraisemblance prend la forme suivante :

$$L = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sigma_{\varepsilon,t\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_t - \mu_e}{\sigma_{\varepsilon,t}}\right)^2}$$

Le logarithme de la vraisemblance est égale à :

$$\ln L = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\frac{1}{\sigma_{\varepsilon,t\sqrt{2\pi}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_t - \mu_e}{\sigma_{\varepsilon,t}}\right)^2}\right)$$

Après quelques manipulations algébriques[6], on obtient :

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln(2\pi) + \ln(\sigma^2_{\varepsilon,t}) + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}$$

où $\varepsilon_t = y_t - \beta' x_t$ et $\sigma^2_{\varepsilon,t}$ (la variance conditionnelle de ε_t) $Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}$ pour un modèle ARCH(1), $Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \delta_1 \sigma^2_{t-1}$ pour un modèle GARCH(1,1), …

La log-vraisemblance est donc une fonction des paramères β, α, δ. L'estimation par maximum de vraisemblance est la recherche des valeurs pour ces paramètres qui maximisent la log-vraisemblance.

○ LA SELECTION D'UN MODELE

Dans la mesure où l'on compare des modèles dits emboîtés (ARCH(1), ARCH(2), GARCH(2,1), …), c'est-à-dire dans la mesure où un modèle peut s'exprimer comme une forme restreinte d'un autre modèle, la sélection peut se faire un "log-likelihood ratio" test :

$LR = -2(\ln L_R - \ln L_U)$ où ln L_R est la log-vraisemblance du modèle restreint et ln L_U est la log vraisemblance du modèle non-restreint. LR suit (asymptotiquement) une loi du Chi2 avec un nombre de degré de liberté égal au nombre de restrictions.

Exemple de modèles emboîtés :

ARCH(1)
$y_t = X'_t \beta + \varepsilon_t$
et $\varepsilon_t = u_t \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2_{t-1}}$
GARCH(1,1)
$y_t = X'_t \beta + \varepsilon_t$
et $\varepsilon_t = u_t \sqrt{h_t}$ avec $h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2_{t-1} + \delta_1 h_{t-1}$
→ le modèle ARCH(1) est une forme restreinte du modèle GARCH(1,1) avec comme restriction $\delta_1 = 0$.

[6] On se souviendra en particulier que le log d'un produit est égal à la somme des logs, le log d'un quotient est égal à la différence des log, le log de x exposant y est égal à y fois le log de x.

○ LE CAS DES RESIDUS NON-GAUSSIENS

Les deux références incontournables sur la question sous les contributions de White (1982) et de Grourieroux, Monfort et Trognon (1984). Il ressort de ces travaux que l'approche du pseudo-maximum de vraisemblance (dans le cas présent, maximisation de la fonction de vraisemblance gaussienne même si les résidus ne sont pas gaussiens), sous un certain nombre de conditions (ces conditions définissent la relation qui doit exister entre la vraie fonction de vraisemblance des observations et celle qui est utilisée pour effectuer l'estimation), produit des estimateurs consistent. Les auteurs proposent la correction nécessaire de la matrice variance / covariance des estimateurs pour obtenir des résultats (asymptotiquement) valides.

○ EXEMPLE : UTILISATION DE TSP

Le code

```
? Selection des ordres du GARCH
OPTIONS CRT;

?1. Lecture des donnees brutes
FREQ N;
SMPL 1,2024;
READ(FILE='d:\temp\Boeing.xls');
SHOW SERIES;

?2. Modeles ARCH(1)
ARCH(NAR=1,NMA=0) BOEING C;
SET lnL1=@LOGL;
PRINT lnL1;

?3. Modeles CARCH(1,1)
ARCH(NAR=1,NMA=1) BOEING C;
SET lnL2=@LOGL;
PRINT lnL2;

?4. Log-likelihood ratio test
SET LR=-2*(lnL1-lnL2);
PRINT LR;
CDF(CHISQ,DF=1) LR;

END;
```

Le résultat

```
                         TSP Version 4.5
                   (04/27/00) DOS/Win      4MB
              Copyright (C) 2000 TSP International
                       ALL RIGHTS RESERVED
                        08/21/00 12:47PM
         In case of questions or problems, see your local TSP
         consultant or send a description of the problem and the
         associated TSP output to:
                        TSP International
                    P.O. Box 61015, Station A
                       Palo Alto, CA 94306
                               USA
         PROGRAM
COMMAND  ***************************************************************
|      1  ? Selection des ordres du GARCH
|      1  OPTIONS CRT;
|      2
|      2  ?1. Lecture des donnees brutes
```

```
|      2  FREQ N;
|      3  SMPL 1,2024;
|      4  READ(FILE='d:\temp\Boeing.xls');
|      5  SHOW SERIES;
|      6
|      6  ?2. Modeles ARCH(1)
|      6  ARCH(NAR=1,NMA=0) BOEING C;
|      7  SET lnL1=@LOGL;
|      8  PRINT lnL1;
|      9
|      9  ?3. Modeles CARCH(1,1)
|      9  ARCH(NAR=1,NMA=1) BOEING C;
|     10  SET lnL2=@LOGL;
|     11  PRINT lnL2;
|     12
|     12  ?4. Log-likelihood ratio test
|     12  SET LR=-2*(lnL1-lnL2);
|     13  PRINT LR;
|     14  CDF(CHISQ,DF=1) LR;
|     15
|     15  END;
         EXECUTION
*******************************************************************************

Current sample:  1 to 2024

Class    Name     Description
-----    ----     -----------

SERIES   DATE     2024 obs. from  1-2024, no frequency
         BOEING   2024 obs. from  1-2024, no frequency


                                     Equation   1
                                     ============

                                     ARCH ESTIMATION


                           OPTIONS FOR THIS ROUTINE
                           ========================

  E2INIT   = HINIT          GT       =                HEXP     = 0.50000
  HINIT    = SSR            MEAN     = FALSE          NAR      = 1
  NMA      = 0              RELAX    = FALSE          UNCOND   = FALSE
  ZERO     = TRUE
Working space used: 28567
                                STARTING VALUES

                     C        ALPHA0        ALPHA1
VALUE       0.00044734    0.00027575       0.00000

F=  -5422.4     FNEW=  -5438.4     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  24.002
F=  -5438.4     FNEW=  -5451.2     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  18.750
F=  -5451.2     FNEW=  -5461.0     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  14.780
F=  -5461.0     FNEW=  -5466.6     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  8.8057
F=  -5466.6     FNEW=  -5468.2     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  2.8147
F=  -5468.2     FNEW=  -5468.4     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT= 0.26870
F=  -5468.4     FNEW=  -5468.4     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT= 0.24244E-02
F=  -5468.4     FNEW=  -5468.4     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT= 0.19843E-06

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER   8 ITERATIONS


   16 FUNCTION EVALUATIONS.

Dependent variable: BOEING
Current sample:  1 to 2024
Number of observations:  2024

(Statistics based on transformed data)
       Mean of dep. var. = .259533E-03
  Std. dev. of dep. var. = .016047
Sum of squared residuals = .520936
   Variance of residuals = .257506E-03
Std. error of regression = .016047
               R-squared = .521876E-03
```

```
      Adjusted R-squared = .521876E-03
           Durbin-Watson = 1.93854 [<1.00]
        Jarque-Bera test = 1876.22 [.000]
(Statistics based on original data)
       Mean of dep. var. = .447341E-03
  Std. dev. of dep. var. = .016610
Sum of squared residuals = .558185
   Variance of residuals = .275919E-03
Std. error of regression = .016611
               R-squared = .930295E-04
      Adjusted R-squared = .930295E-04
           Durbin-Watson = 2.00170
          Schwarz B.I.C. = -5456.96
          Log likelihood = 5468.38
            Number of observations in LogL =   2024
              Initial observations dropped =      0
              Est. initial values for H(t) =      0
                   Initial values for H(t) =  0.27578E-03

                         Standard
Parameter  Estimate        Error       t-statistic   P-value
C          .258830E-03   .368954E-03   .701523       [.483]
ALPHA0     .225312E-03   .153897E-04   14.6405       [.000]
ALPHA1     .181600       .049851       3.64287       [.000]

Standard Errors computed from   analytic first and second derivatives
(Eicker-White)

LNL1 =  5468.38367


                                     Equation   2
                                     ============

                                     GARCH ESTIMATION


                           OPTIONS FOR THIS ROUTINE
                           ========================

  E2INIT   = HINIT          GT       =                HEXP     = 0.50000
  HINIT    = SSR            MEAN     = FALSE          NAR      = 1
  NMA      = 1              RELAX    = FALSE          UNCOND   = FALSE
  ZERO     = TRUE
Working space used: 28703
                                STARTING VALUES

                     C        ALPHA0        ALPHA1         BETA1
VALUE       0.00044734    0.00027575       0.00000       0.00000

F=  -5422.4     FNEW=  -5438.4     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  24.002
F=  -5438.4     FNEW=  -5460.8     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  22.603
F=  -5460.8     FNEW=  -5485.4     ISQZ=  1 STEP= 0.50000     CRIT=  71.819
F=  -5485.4     FNEW=  -5500.8     ISQZ=  1 STEP= 0.50000     CRIT=  38.383
F=  -5500.8     FNEW=  -5504.3     ISQZ=  1 STEP= 0.50000     CRIT=  5.9382
F=  -5504.3     FNEW=  -5506.8     ISQZ=  5 STEP= 0.31250E-01 CRIT=  87.429
F=  -5506.8     FNEW=  -5506.9     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  2.1590
F=  -5506.9     FNEW=  -5507.5     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT=  1.0284
F=  -5507.5     FNEW=  -5507.6     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT= 0.11947
F=  -5507.6     FNEW=  -5507.6     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT= 0.30133E-02
F=  -5507.6     FNEW=  -5507.6     ISQZ=  0 STEP=  1.0000     CRIT= 0.25365E-05

CONVERGENCE ACHIEVED AFTER  11 ITERATIONS


   30 FUNCTION EVALUATIONS.

Dependent variable: BOEING
Current sample:  1 to 2024
Number of observations:  2024

(Statistics based on transformed data)
       Mean of dep. var. = .428119E-03
  Std. dev. of dep. var. = .015387
Sum of squared residuals = .478980
   Variance of residuals = .236767E-03
Std. error of regression = .015387
```

```
               R-squared = .307446E-02
      Adjusted R-squared = .307446E-02
           Durbin-Watson = 1.95787 [<1.00]
        Jarque-Bera test = 1036.97 [.000]
 (Statistics based on original data)
       Mean of dep. var. = .447341E-03
  Std. dev. of dep. var. = .016610
Sum of squared residuals = .558122
   Variance of residuals = .275888E-03
Std. error of regression = .016610
               R-squared = .724297E-03
      Adjusted R-squared = .724297E-03
           Durbin-Watson = 2.00193
          Schwarz B.I.C. = -5492.37
          Log likelihood = 5507.60
            Number of observations in LogL =   2024
              Initial observations dropped =      0
              Est. initial values for H(t) =      0
                   Initial values for H(t) =  0.27575E-03

                         Standard
Parameter  Estimate        Error       t-statistic   P-value
C           .514169E-03   .328493E-03   1.56524       [.118]
ALPHA0      .466759E-05   .402482E-05   1.15970       [.246]
ALPHA1      .039442       .016565       2.38105       [.017]
BETA1       .943963       .029280       32.2394       [.000]

Standard Errors computed from   analytic first and second derivatives
(Eicker-White)

LNL2 =  5507.59715

LR =    78.42696
CHISQ(1)  Test Statistic: 78.42696, Upper tail area: .00000

*******************************************************************************

END OF OUTPUT.

  MEMORY USAGE:    ITEM:    DATA ARRAY  TOTAL MEMORY
                  UNITS:  (4-BYTE WORDS) (MEGABYTES)
  MEMORY ALLOCATED         :    500000       4.0
  MEMORY ACTUALLY REQUIRED :     39567       2.3
  CURRENT VARIABLE STORAGE :     10732
```

REFERENCES

- Bollerslev T., "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity", Journal of Econometrics, 31, 1986, p. 307-327
- Engle R., "AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflations", Econometrica, 50, 1982, p. 987-1008
- Enders W., "Applied Econometric Time Series", New York, John Wiley and Sons, 1995
- Gourieroux C., Monfort A., Trognon A., "Pseudo Maximum Likelihood Methods : Applications to Poisson Models", Econometrica, 52, 1984, p. 701-720
- Greene W.H., "Econometric Analysis", 4°ed., Prentice Hall, 2000
- Hamilton J., "Time Series Analysis", Princeton University Press, 1994
- White H., "Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models", Econometrica, 53, 1982, p. 1-16