

DÉTERMINATION DE LA STRUCTURE À TERME DES TAUX ZÉRO-COUPONS PAR LA MÉTHODE BOOTSTRAP

Source : J.C. Hull, Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice-Hall, 3^{ed}, 1997, p. 82

La structure à terme des taux zéro-coupons ne peut être directement observée sur le marché pour toutes les maturités. On observe en pratique des prix pour des options qui portent des coupons. Le problème est donc d'extraire des prix observés pour ces obligations les taux zéro-coupons correspondants. La méthode dite Bootstrap constitue une possibilité en la matière.

Les données de base sont les prix, pour différentes maturités, d'obligations portant des coupons.

1° ÉTAPE

On trouvera sur le marché une obligation de maturité égale au premier coupon payé par les obligations portant des coupons et ne portant plus de coupon (par exemple, si le premier coupon payé par les obligations dont les prix ont été relevés est dans trois mois, on cherchera une obligation à maturité de trois ne payant plus de coupon d'ici là). Le taux zéro-coupons en composition continue correspondant peut alors être directement déduit à l'aide de la relation suivante :

$$R_c = m \ln\left(1 + \frac{R_m}{m}\right)$$

où R_c est le taux en composition continue, R_m est le taux en composition discrète et m est la fréquence annuelle de composition.

Exemple : supposons que l'on observe un prix de 97.5 pour une obligation à maturité 3 mois ne versant plus de coupons et dont le principal de 100. Le taux zéro-coupon en composition continue correspondant est de :

$$R_c = 4 \ln\left(1 + \frac{2.5}{97.5}\right) = 0.1013 .$$

Le taux en composition discrète correspondant est de $\frac{2.5}{97.5}$ sur trois mois, soit 2.56%, ce qui revient à un taux annuel équivalent de 10.25% (soit 4 x 2.56%). On notera que l'on peut repasser du taux en composition continue de 10.13% à ce taux annuel équivalent par la relation :

$$R_m = m\left(e^{\frac{R_c}{m}} - 1\right) = 4\left(e^{\frac{0.1013}{4}} - 1\right) = 10.25\% .$$

2° ÉTAPE

Si pour d'autres maturités correspondant à des paiements de coupons il existe des obligations cotées en portant plus de coupon, on pourra, comme à la première étape, en déduire les taux zéro-coupons correspondants directement.

3° ÉTAPE

Une fois les obligations ne portant plus de coupons "épuisées", on prendra cette fois appui sur des obligations portant des coupons. La procédure à suivre est la suivante :

- identification de l'obligation pour lesquelles des taux zéro-coupons ont été identifiés pour les différents coupons payables avant la maturité (par exemple, si seul le taux zéro-coupon à trois mois a été identifié, l'obligation choisie sera une obligation à maturité 6 mois et coupon trimestriel). Relevé des caractéristiques de cette obligation (prix, principal, coupons).
- comme pour toute obligation, le prix de cette obligation est également à la valeur actuelle des paiements auxquels elle donne droit. La valeur actuelle des coupons intermédiaires peut aisément être déterminée à partir des taux zéro-coupons déterminés aux étapes précédentes. On peut dès lors extraire le taux zéro-coupon correspondant à la maturité 6 mois par la relation suivante :

$$P = c_1 e^{-r_{T_1} T_1} + \dots + (VR + c_{T_n}) e^{-r_{T_n} T_n}$$

où P est le prix de l'obligation, c_i est le coupon à période i, T_i est la maturité du coupon à la période i en années, VR est la valeur de remboursement de l'obligation et r_{T_i} est le taux zéro-coupon correspondant à la maturité i exprimé en base annuelle.

Exemple : si le taux zéro-coupon à 3 mois est de 10.25%, que l'obligation portant un coupon annuel de 8% payable par tranche de 25% chaque trimestre, remboursable au pair dans 6 mois, est cotée 96, on obtient :

$$96 = 2e^{-0.1025 \times 0.25} + 102e^{-r_{0.5} \times 0.5}$$

où $r_{0.5}$ est le taux zéro-coupon à six mois exprimé en base annuelle.

On procédera ainsi de proche en proche pour les différentes maturités en fonction des informations disponibles. Si les obligations disponibles ne permettent pas d'extraire le taux zéro-coupon pour une maturité donnée, il convient d'utiliser une interpolation linéaire pour approcher le taux correspondant.