LE MODELE DE BLACK ET SCHOLES

La présentation faite dans ce document n'a d'autres ambitions que de fournir à l'étudiant un bref rappel concernant le modèle de Black et Scholes.[1]

Processus suivi par le prix des actions

Les actions suivent un processus dit *brownien géométrique* qui a la forme suivante :

$$dS = mSdt + sSdz \Leftrightarrow \frac{dS}{S} = mdt + sdz$$

où S est le prix de l'action, m est le taux de rendement attendu, s est la volatilité de l'action. et dz est un processus de Wiener qui a la forme suivante : $\mathrm{dz} = e\sqrt{\mathrm{dt}}$ avec e qui suit N(0,1)

Un tel processus est appartient à la famille des processus de Markov. Cela implique que la distribution des prix à tout instant du temps dépend uniquement du prix de l'action au temps t.

Dans ces conditions, on peut affirmer que $\frac{\Delta S}{S}$ (variation proportionnelle du prix de l'action entre le temps t et un temps t+Δt) suit un une loi normale de paramètre $N(m\Delta t, s\sqrt{\Delta t})$.

Lemme d'Ito

Le Lemme d'Ito nous donne le processus que suit toute fonction d'une variable qui suit un processus d'Ito (dont le processus brownien géométrique est un exemple) et du temps :

Ainsi, si x suit un processus d'Ito de forme $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$ et si G est une fonction de x et du temps, alors G suit le processus suivant :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz$$

On peut, par exemple (intéressant), appliquer ce résultat à ln(S). On obtient :

---

[1] L'article de base des auteurs est : Black F. & Scholes M., "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81, may-june 1973, p. 637-59

$$dG = \left(m - \frac{s^2}{2} \right) dt + s dz$$

Cela signifie donc (cfr section précédante) que le changement G (ln(S)) entre le temps t et le temps t+Δt suit une loi normale de moyenne $\left(m - \frac{s^2}{2} \right) \Delta t$ et de variance $s^2 \Delta t$ .La valeur de G en t est $\ln(S_t)$. Sa valeur en t+Δt est $\ln(S_{t+\Delta t})$. Le changement de G entre t et t+Δt est donc $\ln(S_{t+\Delta t})$- $\ln(S_t)$ qui suit une loi normale $N\left(\left(m - \frac{s^2}{2} \right) \Delta t, s \sqrt{\Delta t} \right)$.

Implication sur la distribution du taux de rendement des actions

$\ln(S_{t+\Delta t})$- $\ln(S_t)$ est égal à $\ln(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t})$, qui n'est autre que la mesure du rendement en composition continue. On peut donc affirmer que si le rendement des actions suit un processus brownien géométrique, alors le rendement en composition continue des actions entre t et t+Δt suit une loi normale moyenne $\left(m - \frac{s^2}{2} \right) \Delta t$ et de variance $s^2 \Delta t$.

Mesure de la volatilité historique

Pour estimer la volatilité d'une action à partir de données historiques, on part de l'observation des prix de cette action à des intervalles de temps fixes (chaque jour, chaque semaine, …) : les P_t. La procédure à suivre est alors la suivante :

- on calcul les rendements en composition continue sur la période de temps retenues (attention : il ne s'agit pas de rendements en base annuelle): $r_t = \ln(\frac{P_t}{P_{t-1}})$
- on calcul l'écart-type des rendements : $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n} ((r_t - \bar{r}_t)^2}$
- comme on sait que l'écart-type des rendements est $s \sqrt{t}$, est une estimation de $s \sqrt{t}$. Pour obtenir l'estimation de σ, on divise donc s par $\sqrt{t}$: $s' = \frac{s}{\sqrt{t}}$

Equation différentielle de Black et Scholes

Hypothèses :

- le prix de l'action suit un processus brownien géométrique de moyenne μ et d'écart-type σ

- la vente à découvert d'actifs avec utilisation du produit de la vente est autorisée
- il n'y a ni taxes ni coûts de transaction
- les actifs sont parfaitement divisibles
- l'action ne verse pas de dividende
- il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage sur le marché
- les actifs en traités de manière continue sur le marché
- le taux sans risque est constant et identique sur toutes les maturités

L'action suit donc le processus suivant :

$$dS = mSdt + sSdz$$

Si *f* est le prix d'une option (ou de tout autre dérivé de *S*), en appliquant le lemme d'Ito, on montre donc que *f* suit le processus suivant :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} mS + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} s^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} sSdz$$

La version discrète des équations est :

$$\Delta S = mS\Delta t + sS\Delta z$$

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} mS + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} s^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} sS\Delta z$$

Rappelons que Δz (processus de Wiener) est le même dans *dS* et *df*. En composant un portefeuille de *S* et de *f*, on peut donc éliminer Δz . Ce portefeuille est composé comme suit : -1 *f* (vente d'une dérivé) et $+\frac{\partial f}{\partial S}$ actions (achat de $+\frac{\partial f}{\partial S}$ actions). La valeur du portefeuille est donc :

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

Le changement de valeur de ce portefeuille durant une période Δt est :

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

En substituant Δf et ΔS par sa valeur, on obtient :

$$\Delta \Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} s^2 S^2 \right) \Delta t$$

On constate que Δz, la seule source d'aléat dans ΔS et Δf a disparu. Cela signifie donc que $\Delta \Pi$, la variation de valeur du portefeuille est certaine. Elle ne peut donc être que égale au taux dans risque :

$$\Delta \prod = r \prod \Delta t$$

En remplaçant $\prod$ et $\Delta \prod$ par leur valeur, on obtient :

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} s^2 S^2 \right) = r(f - \frac{\partial f}{\partial S} S)\Delta t$$

Cette équation peut être réorganisée de la manière suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial S} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} s^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

C'est l'équation différentielle de Black et Scholes. Cette équation décrit le comportement que doit respecter, sous les hypothèses énoncées ci-dessus, tout actif financier dérivé de S. Pour déterminer la valeur d'un actif financier dérivé particulier, il faut ajouter des "conditions aux bornes". Il s'agit de la valeur du dérivé aux limites des valeurs possibles pour S et t. Pour un call européen, $f = \max(S - X, 0)$ lorsque t = T et pour un put européen, il s'agit de $f = \max(X - S, 0)$ lorsque t = T.

On soulignera que le portefeuille $\prod$ est sans risque au sens "infinitésimal" : il n'est sans risque que pendant une période de temps extrêmement courte puisque lorsque S et t changent, $\partial f / \partial S$ change aussi.

Exemple : application à un contrat Forward sur une action sans dividende

On sait que la valeur d'un contrat Forward est $f = S - Ke^{-r(T-t)}$, où K est la prix de livraison. Il s'agit bien d'un actif dérivé de S. Les dérivées de cet actif sont donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \ \frac{\partial f}{\partial S} = 1 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

L'équation différentielle de Black et Scholes devient donc :

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS = rf$$

Un contract Forward respecte donc bien cette équation.

Remarque : l'équation différentielle de Black et Scholes ne reprend aucune variable qui fasse référence à l'attitude de l'investisseur envers le risque (en particulier, la rendement attendu du sous-jacent). Les préférences de l'investisseur n'affectent donc pas la solution obtenue. On peut donc utiliser n'importe quelle hypothèse en la matière et la plus commode est sans conteste celle de la neutralité de l'investisseur envers le risque (l'investisseur est indifférent au niveau de risque qu'il supporte). Dans un univers constitué d'investisseurs risque-neutre, le taux de rendement attendu de tous les actifs financiers est le taux sans risque (il n'y a pas de raison que le risque soit rémunéré puisque tout le monde y est indifférent). Dans un tel univers, la valeur actuelle un cash-flow futur est également la valeur de ce cash-flow actualisée au taux sans risque. La valorisation d'un dérivé peut donc être effectuée de la manière suivante :

- on suppose que le taux de rendement attendu du sous-jacent est le taux sans risque;
- on calcul les payoffs du dérivé (par exemple à la maturité) compte tenu de ce taux de croissance;
- on actualise les payoffs au taux sans risque pour obtenir la valeur actuelle du dérivé.

C'est le principe de l'évaluation risque-neutre, utilisée notamment dans la procédure de Monte-Carlo décrite ci-dessous. Rappelons qu'elle s'applique car la valeur du dérivé est indépendante de l'attitude de l'investisseur envers le risque.

Prix d'un call européen et prix d'un put européen

Partant de l'équation différentielle de Black et Scholes, des conditions aux bornes définies ci-dessous et d'une bonne connaissance du calcul intégral, on peut en déduire la valeur du call et du put européens :

Call

$$c = SN(d1) - Xe^{-r(T-t)}N(d2)$$

$$d1 = \frac{\ln(\frac{S}{X} + (r + \frac{s^2}{2}(T-r)}{s\sqrt{T-t}}$$

$$d2 = d1 - s\sqrt{T-t}$$

avec $N(x)$, la distribution normale cumulé centrée réduite.

$N(d_2)$ est la probabilité que l'option soit exercée dans un univers risque-neutre. XN(d2) représente donc l'espérance, en univers risque-neutre, de paiement du prix d'exercice. $e^{-r(T-t)}$ est le facteur d'actualisation. Enfin, SN(d1) peut s'interpréter comme la valeur attendue d'une variable qui vaut S_T si S_T est supérieur à X et 0 sinon.

Put

$$c = Xe^{-r(T-t)}N(-d2) - SN(-d1)$$

$$d1 = \frac{\ln(\frac{S}{X} + (r + \frac{s^2}{2}(T-r)}{s\sqrt{T-t}}$$

$$d2 = d1 - s\sqrt{T-t}$$

avec $N(x)$, la distribution normale cumulé centrée réduite.

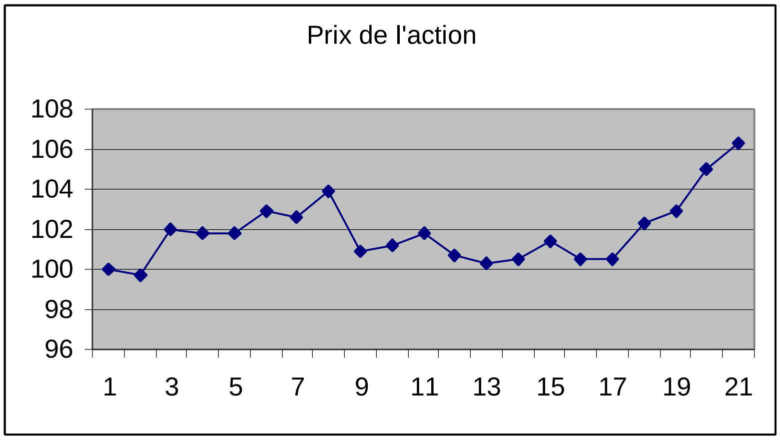
Simulation de Monte-Carlo

Pour simuler l'évolution dans le temps d'un mouvement Brownien géométrique, connaissant sa μet son σ, on procède comme suit :

- détermination de Δt (par exemple, 1%, soit 3.65 jour sur on travaille en base annuelle)
- détermination de la moyenne et de l'écart-type de $\frac{\Delta S}{S}$ (il s'agit respectivement de $\mu\Delta$t et de $\sigma\sqrt{\Delta t}$).
- fixation de d'un point de départ pour S (S_{tO})
- calcul de S_{t1} par tirage d'un nombre aléatoire *u* dans $\frac{\Delta S}{S}$ qui suit $N(m\Delta t, s\sqrt{t})$, calcul de S_{t0} x *u* (ce qui donne la variation en valeur de S entre t0 et t1) et application du résultat à S_{t0} pour obtenir S_{t1}.
- répétition de la procédure pour obtenir une trajectoire de S dans le temps par pas de longueur Δt.

Exemple : trajectoire d'une action dans le temps

Moyenne (m)	14%	(en base annuelle)	
Ecart-type (s)	20%	(en base annuelle)	
Pas	0.0027	(jour)	
Temps	Tirages alétoires N(0,1)	Tirages alétoires N(m,s)	Prix de l'actions
			100
1	-1.096921096	(0.0111)	98.89
2	-0.887687293	(0.0089)	98.01
3	-0.778561571	(0.0078)	97.25
4	-0.359930254	(0.0034)	96.92
5	-0.347048399	(0.0032)	96.60
6	0.771929081	0.0085	97.42
7	0.935813205	0.0102	98.41
8	0.342984094	0.0040	98.80
9	0.350894425	0.0041	99.21
10	0.920917955	0.0100	100.20
11	0.542004273	0.0061	100.81
12	0.658908448	0.0073	101.54
13	-1.393416369	(0.0142)	100.10
14	-1.659427653	(0.0170)	98.40
15	0.455667077	0.0052	98.90
16	-1.193493517	(0.0121)	97.71
17	0.742086286	0.0082	98.50
18	-1.892440196	(0.0194)	96.59
19	-1.075873115	(0.0109)	95.54
20	1.242283361	0.0134	96.82



La procédure proposé par Boyle (1976) pour évaluer par Monte-Carlo une option sur action est alors la suivante :

- simulation de l'évolution du prix de l'action jusqu'à la maturité de l'option en prenant comme taux de croissance le taux sans risque et comme volatilité la volatilité de l'action. On pratique, on ne divise pas la période restant jusqu'à la maturité en sous-périodes (cela ne fait qu'amplifier les bruits liés à la discrétisation). La simulation est donc à un pas avec Δt égal au temps restant à vivre de l'option. On simule un grand nombre de prix possible pour l'action.
- calcul des payoffs de l'option à la maturité pour les différents prix obtenus pour l'action.
- actualisation des payoffs obtenus au taux sans risque (application du principe de l'évaluation risque neutre).
- la valeur de l'option est la moyenne des payoffs actualisés.