

Une **matrice** est un arrangement rectangulaire de chiffres :

$$A = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Un vecteur est un ensemble de nombres rangés en une ligne ou une colonne. Un **vecteur ligne** est une matrice comportant une seule ligne, un **vecteur colonne** est une matrice à une seule colonne.

Les **dimensions** d'une matrice sont les nombres de ses lignes et de ses colonnes. L'exemple ci-dessus nous donne une idée d'une matrice  $A$  de taille «  $n \times m$  ». La matrice  $A$  comporte  $n$  lignes et  $m$  colonnes.

### Opérations sur les matrices

Soit  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  et  $B = (b_{ij})_{p \times q}$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} n = p \\ m = q \\ a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, m \end{cases}$$

• Si  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  et  $B = (b_{ij})_{n \times m}$ , alors la matrice  $C = (c_{ij})_{n \times m}$  où  $C = A + B$  est telle

que :  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i = 1, \dots, n; \forall j = 1, \dots, m$

• Si  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  et  $B = (b_{ij})_{m \times p}$ , la matrice  $C = A.B = (c_{ij})_{n \times p}$  où  $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj}$

$\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p$

• Si  $AB \exists, BA \nexists$  nécessairement. Si  $BA \exists, AB \neq BA$  généralement

• Si  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}, B = \lambda A = (b_{ij})_{n \times m}$  où  $b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p$

• Si  $A = (a_{ij})_{n \times m}$  alors sa matrice transposée  $A' = (a_{ji})_{m \times n} \quad \forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p$

•  $(A')' = A$

• La transposée d'un vecteur colonne  $\mathbf{a}$  est un vecteur ligne :

$$a' = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

### Les différents types de matrices

- Matrice carrée est une matrice de taille  $n \times n$
- Matrice symétrique est une matrice carrée ayant  $a_{ik} = a_{ki} \forall i, \forall k, i \leq n \text{ et } k \leq n$
- Une matrice  $A$  est symétrique si et seulement si  $A = A'$
- Matrice diagonale est une matrice carrée dont les éléments hors la diagonale principale sont nuls

$$A = (a_{ik}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ a & a \in \mathbb{R} \text{ si } i = k \end{cases}$$

- Matrice scalaire est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont tous identiques
- Matrice d'identité est une matrice scalaire dont les éléments diagonaux sont égaux à 1. La matrice identité est toujours notée  $\mathbf{I}$
- Matrice triangulaire (inférieure ou supérieure) est une matrice avec uniquement des éléments nuls au dessus ou en dessous de sa diagonale principale

### Propriétés

- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
- $A.(B.C)=(A.B).C$
- $(A.B)'=B'A'$
- $(A.B.C)'=C'B'A'$
- $A.(B+C)=A.B+A.C$
- $(A+B).C=A.C+B.C$
- Le produit entre deux vecteurs,  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , est un scalaire

$$a'b = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$$

$$a'_{1 \times n} \cdot b_{n \times 1} = c_{1 \times 1}$$

### Sommes des valeurs

Soit le vecteur colonne  $i$

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ alors, } \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n = i'X$$

La moyenne arithmétique :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} i'X \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i = i'X = n\bar{x}$$

La somme des carrés des éléments d'un vecteur  $\mathbf{X}$  :

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = X'X$$

La somme des produits de  $n$  éléments des vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  :

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Matrice Idempotente

$$\bullet \quad M^0 = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & & \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \dots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix} = M^0 X$$

$$\bullet \quad M^0 M^0 = M^0$$

Définition : *Matrice Idempotente*

Une matrice Idempotente est celle qui est égale à son carré

Pour une variable  $x$ , la somme des carrés des écarts de la moyenne est :

$$\bullet \quad \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \mathbf{X}' M^0 X$$

Pour deux vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  le produit croisé des écarts aux moyennes :

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \mathbf{X}' M^0 \mathbf{Y}$$

On déduit facilement que

$$\mathbf{X}' M^0 \mathbf{Y} = \mathbf{Y}' M^0 \mathbf{X}$$

Géométrie matricielle

Une matrice est un ensemble de vecteurs colonnes. Le nombre de colonnes dans cette matrice est le nombre de vecteurs et le nombre de lignes est le nombre de coordonnées dans chaque vecteur colonne.

Dépendance Linéaire : Un ensemble de vecteurs est **linéairement dépendant** si tout vecteur de cet ensemble peut être écrit comme une combinaison linéaire des autres vecteurs

Indépendance Linéaire : Un ensemble de vecteurs est **linéairement indépendant** si et seulement si la seule solution de  $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0$  est  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

### Rang d'une matrice

En algèbre linéaire, le rang d'une matrice est le nombre de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes après avoir enlevé les colonnes ou lignes nulles (ne contenant que des 0). Le rang des lignes est égal au rang des colonnes

*si  $\text{rang}(A) = \text{nombre de colonnes (lignes)} \Leftrightarrow A$  est de plein rang*

*$\text{rang}(A) \leq \min(\text{nombre de lignes}, \text{nombre de colonnes})$*

*$\text{rang}(A) = \text{rang}(A')$*

*$\text{rang}(AB) \leq \min(\text{rang}(A), \text{rang}(B))$*

### Trace d'une matrice

$$A = (a_{ij})_{n \times n}; \quad \text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Propriétés des traces

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$$

$$\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr } A$$

$$\text{tr } A' = \text{tr } A$$

$$\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$$

### Déterminant d'une matrice

Le déterminant d'une matrice  $A=(a_{ij})$  d'ordre  $n$ , défini par Gottfried Leibniz est le nombre noté  $\det(A)$  ou  $|A|$  ; pour chaque ligne  $i$ :

$$\det A = |A| = \sum_{i=1}^k a_{ik} (-1)^{i+k} |A_{ik}|, \quad k = 1, \dots, k \text{ (formule de Leibniz)}$$

Cette méthode est aussi connue sous le nom de *développement en cofacteurs*.

Où  $A_{ik}$  est la matrice des cofacteurs, obtenue à partir de  $A$  en supprimant la ligne  $i$  et la colonne  $k$ . Le déterminant de  $A_{ik}$  est appelé mineur de  $A$ . Multiplié par  $(-1)^{i+k}$ , il devient un cofacteur.

### Propriétés

Le déterminant d'une matrice est non nul si et seulement si elle est de plein rang.

$$|A_{2 \times 2}| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \text{formule de Cramer}$$

$$A \text{ est une matrice diagonale} \Leftrightarrow |A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

$$|O_{n \times n}| = 0$$

$$|I_{n \times n}| = 1$$

$$\text{Soit } A = (a_{ij})_{n \times n},$$

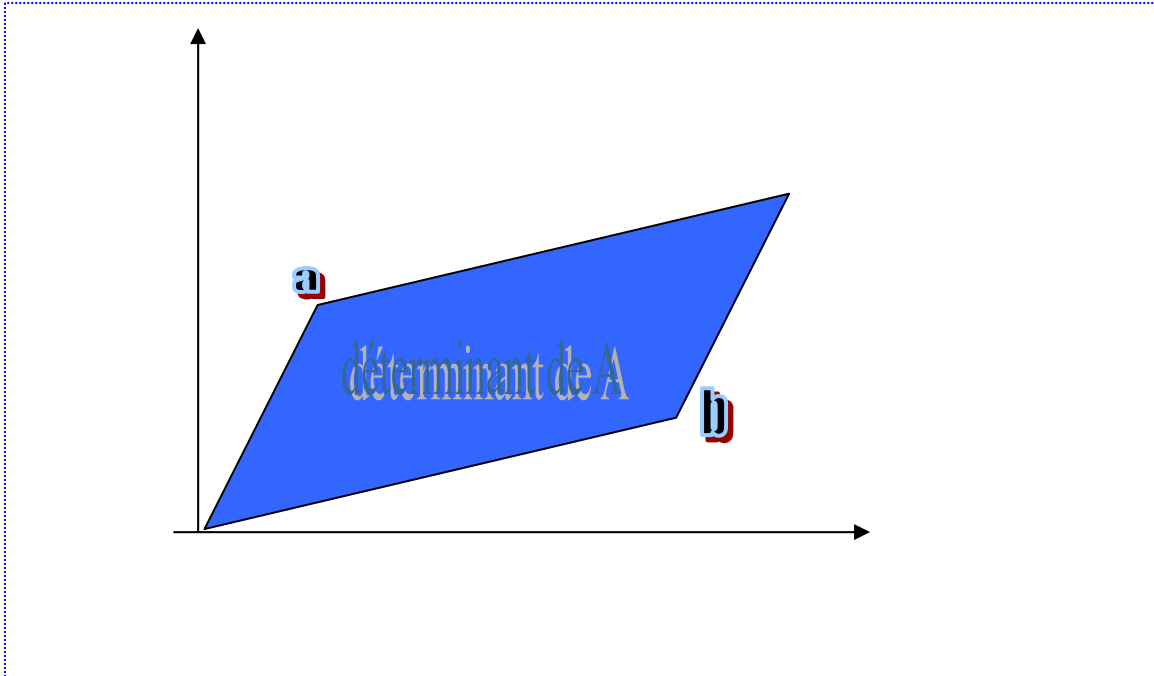
$$|\lambda A| = \lambda^n |A|$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |B \cdot A|$$

$$|A'| = |A|$$

### Signification géométrique des déterminants (cas de deux dimensions)

Soit une matrice  $A = [a \quad b]$  où  $a_{2 \times 1}$  et  $b_{2 \times 1}$



Le déterminant d'une matrice carrée est égal à la surface engendrée par le parallélogramme construit par les différentes coordonnées. Dans le cas d'une matrice  $(n \times m)$  le déterminant est égal au volume rempli par le solide. Pour une meilleure explication, consultez l'ouvrage de *William GREENE* intitulé «*Econometric Analysis*»

### Inversion de matrices carrées

Dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , le produit matriciel est défini pour tout couple d'éléments et la matrice  $I_n$  est neutre pour ce produit :  $I_n \cdot A = A = A \cdot I_n$

La notion de matrice inversible est définie comme suit :

- La matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est inversible (ou régulière) si
 
$$\exists A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^{-1} \cdot A = I_n = A \cdot A^{-1}$$
- Lorsqu'elle existe,  $A^{-1}$  est appelée la matrice inverse de  $A$

Toutes les matrices carrées  $A$  non nulles, c'est-à-dire distinctes de  $\mathbf{0}_{n \times n}$ , ne sont pas forcément inversibles. Les matrices non inversibles sont connues comme *matrices singulières*.

Forme générale des inverses des matrices : Si  $A$  est une matrice non singulière ( $|A| \neq 0$ ) son inverse  $A^{-1}$  peut être trouvée de la manière suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj } A)$$

$\text{adj } A$  est la **matrice adjointe**. Elle est égale à la transposée de la matrice des cofacteurs.

$$\text{adj } A = (A_{ik})'$$

Les étapes de détermination de la matrice inverse sont :

1. Trouver le déterminant de  $A$ . S'il n'est pas nul, passer à l'étape 2.
2. Remplace chaque élément  $a_{ij}$  de  $A$  par son cofacteur pour obtenir la matrice des cofacteurs.
3. Diviser chaque élément des la matrice adjointe par  $|A|$

L'inverse d'une matrice  $A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  est donné par la forme suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

L'inverse d'une matrice carrée d'ordre 2 existe si et seulement si son **déterminant est non nul**

### Propriétés

- Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est non sin gulière, alors :
  - $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $A'$  est inversible et  $(A')^{-1} = (A^{-1})'$
  - $\forall \lambda \in \mathbb{R}_0 : (\lambda A)$  est inversible et  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
  - Si  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sont non sin gulières, alors le produit  $A.B$  est non sin gulier
 
$$(A.B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$
  - La matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est non sin gulière  $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang } A = n$

- Si  $D$  est une matrice diagonale  $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$ ,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{pmatrix}$$

- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^{-1})' = (A')^{-1}$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

### Systemes linéaires

Définition et propriétés :

Un système linéaire de  $n$  équations à  $m$  inconnues soumet un vecteur  $X$ , à  $m$  composantes, simultanément à  $n$  équations linéaires.

D'une façon plus analytique, tout système linéaire s'écrit:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{1m}x_{1m} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{2m}x_{2m} = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{n1} + a_{n2}x_{n2} + \dots + a_{nm}x_{nm} = b_n \end{cases}$$

$$\text{où } \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m; \quad a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$$

Ce système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$AX = B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix}_{n \times m}, B = \begin{pmatrix} b_i \end{pmatrix}_{n \times 1} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_j \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

Une solution de ce système est un vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_j \end{pmatrix}_{m \times 1}$  dont les composantes vérifient simultanément toutes les équations du système.

On distingue divers types de systèmes :

- Système *carré* si  $m=n$
- Système de *Cramer* si le système est *carré* et  $A$  est une matrice non singulière (inversible)
- Système *homogène* si  $B=0$
- Système *impossible* s'il n'admet aucune solution (équations incompatibles)
- Système *compatible* s'il admet au moins une solution
- Système *indéterminé* s'il admet plusieurs solutions

### Solution d'un système linéaire

La résolution des **systèmes d'équations linéaires** appartient aux problèmes les plus anciens dans les mathématiques et ceux-ci apparaissent dans beaucoup de domaines, comme dans le traitement des signaux numériques ou dans l'approximation de problèmes non linéaires en analyse numérique. Un moyen efficace de résoudre un système d'équations linéaires est donné par l'élimination de Gauss-Jordan ou par la décomposition de Cholesky.

Nous nous intéressons aux systèmes de Cramer qui jouissent de la propriété suivante :

- Le système de Cramer  $AX=B$  admet la solution unique  $X=A^{-1}B$ , qui s'exprime aussi sous la forme :

$$x_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} A_1 & \cdots & A_{j-1} & B & A_{j+1} & \cdots & A_n \end{vmatrix}, \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\text{et } A_k = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \text{ est la } k\text{-ème colonne de } A$$

### Matrices semblables

Les matrices  $A$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sont dites semblables si  $\exists H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , inversible, telle que :

$$A = H^{-1}.B.H \quad (\Leftrightarrow B = H.A.H^{-1})$$

$H$  est appelée *matrice de passage*

## Matrices diagonalisables

Définitions : La matrice  $A$  est *diagonalisable* si elle est *semblable* à une matrice diagonale.

Les matrices carrées ne sont pas toutes diagonalisables.

Soit  $A = (a_{ij})_{n \times n}$

- Le vecteur colonne  $X \in \mathbb{R}^{n \times 1} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  est **un vecteur propre** de  $A$  si
  - $\exists \lambda \in \mathbb{R} : AX = \lambda X$
- Dans ce cas, on dit que  $X$  est associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$

## Le spectre d'une matrice

La détermination des valeurs propres de la matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  s'effectue grâce à la propriété suivante :

- $\lambda \in \mathbb{R}$  est une valeur propre de  $A \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$
- Le polynôme  $|A - \lambda I|$ , de degré  $n$ , est appelé *polynôme caractéristique* de  $A$
- L'équation  $|A - \lambda I| = 0$  est appelée *équation caractéristique* de  $A$
- L'ensemble de solutions *complexes* de cette équation constitue le *spectre* de  $A$  noté  $S_A$

Le spectre comporte donc  $n$  nombres complexes, distincts ou non. Toutefois, seuls ses éléments réels sont des valeurs propres auxquelles sont associées des vecteurs propres. Le spectre d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  jouit des propriétés suivantes :

- $A$  et  $A'$  ont le même spectre
- Si  $A$  est non singulière, alors 0 n'est pas une valeur propre de  $A$
- Si  $A$  est non singulière et  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A$  alors  $\frac{1}{\lambda}$  est une valeur propre de  $A^{-1}$
- Les matrices semblables ont toutes le même spectre

## Spectre et diagonalisation

Les valeurs propres d'une matrice diagonales de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  sont les  $n$  nombres réels, nuls ou pas, se trouvant sur sa diagonale. Si un nombre  $y$  apparaît plus d'une fois, c'est que la valeur propre est multiple (racine multiple du polynôme caractéristique). Le spectre d'une matrice diagonale est donc un sous ensemble de  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Si } D \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ est diagonale} \Leftrightarrow D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & d_n \end{pmatrix},$$

$$\text{alors } S_D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est symétrique, alors elle est diagonalisable.

### **Condition nécessaire et suffisante concernant la diagonalisation des matrices carrées :**

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est diagonalisable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles, et, pour toute valeur propre  $\lambda$  de multiplicité algébrique  $m_\lambda \geq 2$ , le système linéaire  $AX = \lambda X$  admet une infinité de solutions à  $m_\lambda$  paramètres.

On obtient une matrice diagonale semblable à  $A$  en plaçant les  $n$  valeurs propres de  $A$  sur la diagonale (avec répétition en cas de valeurs multiples). L'ordre des valeurs propres importe peu, puisque toutes les matrices diagonales dont les éléments sont identiques à une permutation près, ont le même spectre et sont toutes semblables entre elles.

$$\text{Propriétés : } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix}, A = C\Lambda C'$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(\lambda)$$

$|A| = |\Lambda| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \Leftrightarrow$  une matrice est singulière si et seulement si son déterminant est nul, ou si et seulement si elle a au moins une racine caractéristique nulle

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : A^p = C\Lambda^p C' = C \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix} C'$$

Si  $A^{-1}$  existe, les racines caractéristiques de  $A^{-1}$  sont les réciproques de celles de  $A$  et les vecteurs caractéristiques sont les mêmes

$$A^{-1} = C\Lambda^{-1}C'$$

Pour toute matrice non singulière symétrique  $A=CAC'$ ,  
 $A^k = CA^kC'$ ,  $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

### Calcul et Algèbre matricielle

L'approximation de Taylor

Le développement de Taylor est une approximation polynômiale de  $f(x)$ .  
 L'approximation autour d'un point arbitraire  $x^0$  est

$$f(x) \approx f(x^0) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \frac{d^i f(x^0)}{d(x^0)^i} (x - x^0)^i$$

L'approximation linéaire est la plus utilisée en *économétrie*

$$f(x) \approx \alpha + \beta x \quad \text{où}$$

$$\alpha = f(x^0) - f'(x^0)x^0$$

$$\beta = f'(x^0)$$

L'approximation *quadratique* est

$$f(x) \approx \alpha + \beta x + \gamma x^2 \quad \text{où}$$

$$\alpha = \left[ f^0 - f'^0 x^0 + \frac{1}{2} f''^0 (x^0)^2 \right], \beta = \left[ f'^0 - f''^0 x^0 \right], \gamma = \frac{1}{2} f''^0$$

Considérons la fonction  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .  $y$  est une *fonction scalaire* d'un vecteur ( $y=f(x)$ )  
 Le vecteur des dérivées partielles, ou **vecteur gradient** est

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \partial y / \partial x_1 \\ \partial y / \partial x_2 \\ \dots \\ \partial y / \partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix}$$

La matrice de *dérivées secondes* ou **hessien** est

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

**H** est généralement carrée et symétrique.

$$H = \left[ \frac{\partial \left( \frac{\partial y}{\partial X} \right)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \left( \frac{\partial y}{\partial X} \right)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \left( \frac{\partial y}{\partial X} \right)}{\partial x_n} \right] = \frac{\partial^2 y}{\partial X \partial X'}$$

L'approximation de Taylor de  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'ordre 1, ou linéaire, est

$$y \approx f(x^0) + \sum_{i=1}^n f_i(x^0)(x_i - x_i^0) \quad \text{Ou}$$

$$y \approx [f^0 - g^{0'} X^0] + g^{0'} X$$

L'approximation quadratique, ou de second ordre, est

$$y \approx \alpha + \beta' x + \frac{1}{2} x' \Gamma x$$

$$\text{Où } \alpha = f^0 - g^{0'} x^0 + \frac{1}{2} x^{0'} H^0 x^0, \beta = g^0 - H^0 x^0 \text{ et } \Gamma = H^0$$

La différenciation d'une matrice

Si  $a' = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$  est un vecteur ligne de nombres et,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

est un vecteur colonnes dont les variables sont  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , alors

$$\frac{\partial(a'x)}{\partial x} = a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $\frac{\partial Ax}{\partial x} = A'$ ,  $\frac{\partial Ax}{\partial x'} = A$

Une forme quadratique est écrite

$$X'AX = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Alors

$$\frac{\partial X'AX}{\partial X} = 2AX \text{ qui est un vecteur colonne de } n \text{ éléments,}$$

ou

$$\frac{\partial X'AX}{\partial X} = 2X'A \text{ qui est un vecteur ligne de } n \text{ éléments}$$

Théorème de Lagrange :

Pour connaître l'optimum de la fonction  $f(x_i)$ , ( $f(x_i)$  est définie sur l'ensemble  $D$ ), sous les contraintes  $g_j(x_i)=0, j=1, \dots, m$ ; la fonction **lagrangienne** du problème :

$$\begin{cases} \text{opt. } f(x_i), x \in D \subset \mathfrak{R}^n \\ \text{sous les contraintes } g_j(x_i) = 0, j = 1, \dots, m \ (m < n) \end{cases}$$

est définie par :

$$L : D \times \mathfrak{R}^m : (x_i, \lambda) \rightarrow L(x_i, \lambda) = f(x_i) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_i)$$

Où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

La solution du problème est possible en calculant le **gradient** de  $L$  qui est égal à zero. Ensuite, nous définissons la matrice **hessienne partielle** (par rapport aux  $x_i$ ), de

taille  $n \times n$ , par  $H_L^x(x, \lambda) = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} (x, \lambda) \right)_{n \times n}$  .

Le signe de cette matrice doit être étudié pour déterminer quel genre d'optimum on trouve.

### **Références Bibliographiques**

Chiang, Alpha C. : *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw Hill, New York.

Greene, W. : *Econometric Analysis*, fifth edition, Prentice Hall

Gujarati, D. : *Basic Econometrics*, fourth edition, McGraw Hill, New York

Hadley, G. : *Linear Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1961