Annexe 2 : le C.A.P.M.

- Démonstration :
  - Constituons un portefeuille composé pour partie du portefeuille de marché (1-x) et pour partie d ’un actif risque (x) :

$$\bar{r}_p = x\bar{r}_i + (1-x)\bar{r}_m$$

$$s_p = \sqrt{x^2 s_i^2 + (1-x)^2 s_m^2 + 2x(1-x)s_{im}}$$

  - Prenons la dérivée par rapport x du rendement et du risque de ce portefeuille (on fait légèrement varier x) :

$$\frac{d\bar{r}_p}{dx} = \bar{r}_i - \bar{r}_m$$

$$\frac{ds_p}{dx} = \frac{1}{2}\left[x^2 s_i^2 + (1-x)^2 s_m^2 + 2x(1-x)s_{im}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[2xs_i^2 - 2s_m^2 + 2xs_m^2 + 2s_{im} - 4xs_{im}\right]$$

  - A l ’équilibre, tous les actifs étant dans M, x=0 :

$$\frac{ds_p}{dx} = \frac{1}{2}\left(s_m^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2s_m^2 + 2s_{im}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s_m}\left(-2s_m^2 + 2s_{im}\right)$$

$$= \frac{1}{2s_m}(-2s_m^2) + \frac{1}{2s_m}(2s_{im})$$

$$= -s_m + \frac{s_{im}}{s_m} = \frac{s_{im} - s_m^2}{s_m}$$

– A l ’équilibre, le taux d ’échange entre la rentabilité et le risque nous est donné par la CML :

$$\frac{\bar{r}_m - r_s}{s_m} = \frac{\frac{d\bar{r}_p}{dx}}{\frac{ds_p}{dx}} = \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_m}{\frac{s_{im} - s_m^2}{s_m}}$$

$$\Rightarrow \bar{r}_i - \bar{r}_m = \frac{\bar{r}_m - r_s}{s_m} \frac{s_{im} - s_m^2}{s_m}$$

$$= \frac{\bar{r}_m s_{im} - \bar{r}_m s_m^2 - r_s s_{im} + r_s s_m^2}{s_m^2}$$

$$= \frac{r_s s_m^2}{s_m^2} + (\bar{r}_m - r_s) \frac{s_{im}}{s_m^2}$$

$$= r_s + (\bar{r}_m - r_s) \frac{s_{im}}{s_m^2}$$