Chapitre 1 : Algèbre Linéaire
Méthodes Quantitatives pour la Gestion MQTM 104

Les symboles de l'addition et du produit

La lettre capitale grecque ∑ (sigma) indique une sommation. D'où,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Propriétés importantes de la sommation :

- k *est une constante*, $\sum_{i=1}^{n} k = nk$
- k *est une constante*, $\sum_{i=1}^{n} kx_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i$
- $\sum_{i=1}^{n}(a + bx_i) = na + b\sum_{i=1}^{n} x_i$, où a et b sont constants

Suites Réelles

La suite réelle $(u_t)_{t\in \mathrm{N}}$ est définie par l'application : $u : \mathrm{N} \to \Re : t \to u_t$

Le nombre réel $u_k (k \in \mathrm{N})$ est appelé *terme de rang k* de la suite

La convergence des suites

La suite $(u_t)_{t\in \mathrm{N}}$ *converge vers le nombre réel a* si :

$$\forall \varepsilon \rangle\ 0, \exists \mathrm{T} \in \mathrm{N} : t \geq \mathrm{T} \Rightarrow |u_t - a| \langle \varepsilon$$

La suite est dite *convergente* et le réel *a* est appelé *limite* de la suite $(u_t)_{t\in \mathrm{N}}$:

$\lim_{t\to\infty} u_t = \lim u_t = a$

Propriétés des limites de suites

- Le principe du « pincement » :

$si\ (u_t)_{t\in N}, (v_t)_{t\in N}, (w_t)_{t\in N}$ *sont telles que* $: \lim_{t\to\infty}(u_t) = \lim_{t\to\infty}(v_t) = \lim_{t\to\infty}(w_t) = a \in \Re$

$\exists T \in N : \forall t \geq T : u_t \leq v_t \leq w_t$, *alors* $\lim_{t\to\infty} v_t = a$

Si : $\lim_{t\to\infty} u_t = a \in \Re$ *et* $\lim_{t\to\infty} v_t = b \in \Re$,*alors* :

- $\lim_{t\to\infty}(u_t + v_t) = a + b$
- $\lim_{t\to\infty}(u_t \cdot v_t) = a.b$
- $\forall \lambda \in \Re : \lim_{t\to\infty}(\lambda u_t) = \lambda a$
- $si\ \forall t \in N : u_t \neq 0\ et\ a \neq 0 : alors \lim_{t\to\infty} \frac{1}{u_t} = \frac{1}{a}$

Toute combinaison linéaire de suites convergentes est convergente

Les suites remarquables

Suites constantes

$$\lim_{t\to\infty} a = a$$

Suites de Puissances

$$\lim_{t\to\infty} t^a = \begin{cases} 0 & si\ a < 0 \\ 1 & si\ a = 0 \\ +\infty & si\ a > 0 \end{cases}$$

Suites exponentielles

$$\lim_{t\to\infty} a^t = \begin{cases} 0 & si\ |a| < 1 \\ 1 & si\ |a| = 1 \\ +\infty & si\ a > 1 \\ n'existe\ pas\ dans\ \Re & si\ a \leq -1 \end{cases}$$

Propriété des limites de fonctions

Limites des fonctions composées

Si $\lim_{x\to a} f(x) = b \in \Re$ *et* $\lim_{x\to b} g(x) = c \in \Re$,

alors $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = c$

Dérivabilité

Les dérivées jouent un rôle fondamental dans l'étude de variation des fonctions. Au plan théorique, elles permettent d'aborder la caractérisation des fonctions monotones et la détermination des extrema. Au plan appliqué, elles conduisent à la formalisation de notions aussi importantes que la vitesse et l'accélération en physique, le coût marginal ou l'utilité marginale en gestion.

Propriétés des dérivées de fonctions

Nous tenons à souligner que la notion de continuité et de dérivabilité des fonctions sont liées de manière très simple :

- f est dérivable en a $\Rightarrow$ f est continue en a
- f est dérivable à droite (respectivement à gauche) $\Rightarrow$ f est continue à droite (respectivement à gauche) en a
- Les implications utilisées dans les deux propriétés citées au dessus supposent que les réciproques ne sont pas toujours vraies

Règles de calcul des dérivées

Si f et g sont deux fonctions dérivables en a, alors :

- $\forall\ \lambda \in \Re : \lambda f$ *est dérivable en a et* $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
- $(f+g)$ *est dérivable en a et* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $(f.g)$ *est dérivable en a et* $(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$
- *si* $g(a) \neq 0, \dfrac{f}{g}$ *est dérivable en a et* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$
- *si* $f(a) \rangle\ 0,\ f^g$ *est dérivable en a et*

$$\left[f(a)^{g(a)}\right]' = f(a)^{g(a)}\left(g'(a)\ln f(a) + g(a)\frac{1}{f(a)}f'(a)\right)$$

Si f *est dérivable en a et* g *est dérivable en* $f(a)$*, alors la fonction composée* $(g \circ f)$ *est dérivable en a et* $(g \circ f)' = g'(f(a))f'(a)$

La règle de l'Hospital

si :

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
- $\exists \eta \rangle\ 0 :\ f$ *et* g *sont dérivables dans* $(a-\eta\ , a+\eta) \setminus \{a\}$

- $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe dans* $\Re$

alors : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Théorème de Taylor (Théorème de l'approximation polynomiale locale) :

L'approximation autour d'un point arbitraire x^0 est

$$f(x) \approx f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \frac{d^i f(x^0)}{d(x^0)^i} (x - x^0)^i$$

Théorème de Lagrange :

Pour connaître l'optimum de la fonction *f(x$_i$)*, (*f(x$_i$) est définie sur l'ensemble D)*, sous les contraintes $g_j(x_i)=0, j=1,\ldots,m$;la fonction **lagrangienne** du problème :

$$\begin{cases} opt.\ f(x_i),\ x \in D \subset \Re^n \\ sous\ les\ contraintes\ g_j(x_i) = 0,\ j = 1,\ldots,m\ (m \angle n) \end{cases}$$

est définie par :

$$L : D \times \Re^m : (x_i, \lambda) \to L(x_i, \lambda) = f(x_i) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_i)$$

Où $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$

La solution du problème est possible en calculant les dérivées de L par rapport à x_i et λ_i

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (les\ contraintes) \end{cases}$$

Théoriquement, on a un système de n équations à n inconnus. Ce système a une solution unique.