CONCEPTS DE BASE – COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES

Couples de variables aléatoires

La loi d'un couple de variables aléatoires (v.a.) peut être donnée par sa fonction de répartition :

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \Pr\big((X,Y) \in \left]-\infty, x\right[\times \left]-\infty, y\right[\big) = \Pr(X < x, Y < y)$$

- **cas discret** : la loi du couple (*X*, *Y*) s'écrit : $\Pr(X = i, Y = j)$, pour tous les couples d'entier i et j.

Y \ X	1 j L	
1 j M	$p_{i,j}$	$p_{.j}$
	$p_{i.}$	1

La loi **marginale** de X (resp. Y) est donné par $P(X = i) = p_{i.} = \sum_j \Pr(X = i, Y = j)$ (resp. $P(Y = j) = p_{.j} = \sum_i \Pr(X = i, Y = j)$).

L'**espérance** du couple (*X*,*Y*) est le couple (*E(X)*,*E(Y)*).

La **covariance** du couple (*X*,*Y*) est défini comme suit :

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) = \sum_{i,j} ijp_{ij} - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

- **cas continu** : la loi du coupe (*X*,*Y*) est donnée par la **densité** du couple, notée $f_{(X,Y)}(x,y)$ ou $f(x,y)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. Sur la base de ce dernier, on a alors :

$$\Pr((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)\,dxdy$$

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy$$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

La loi **marginale** de X est donnée par la densité de X : $f_x(x) = \int_{\Re} f(x,y)dy$ ou par la fonction de répartition de X : $F_X(X) = F_{(X,Y)}(x,+\infty)$.

Comme dans le cas discret, **l'espérance** du couple *X,Y* est égal à *E(X,Y) = (E(X), E(Y))* et la **covariance** est égale à :

$$Cov(X,Y) = E\left[(X - E(X))(Y - E(Y))\right] = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$= \iint_{\Re^2} xy \quad f(x,y)dxdy - E(X)E(Y)$$

Propriétés

$$Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$$
$$Cov(X,X) = Var(X)$$
$$Cov(X+a, Y+b) = Cov(X,Y)$$
$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = Cov(X+Y, X+Y)$$

La covariance est linéaire par rapport à chaque variable aléatoire.

On définit le **coefficient de corrélation** comme $r(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{s(X)s(Y)}$, dont les deux **propriétés** sont :

$$-1 \leq r(X,Y) \leq +1$$
$r = \pm 1 \Leftrightarrow \exists a, b, g$ réels tels que $aX + bY = g$ presque partout

La **matrice Variance-Covariance** est donnée par :

$$V(X,Y) = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ & \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{pmatrix}$$

Enfin, la **matrice de corrélation** est définie par :

$$C(X,Y) = \begin{pmatrix} 1 & r(X,Y) \\ & \\ r(X,Y) & 1 \end{pmatrix}$$

Indépendance

Deux évènements sont **indépendants** si et seulement si (ssi) :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Deux variables aléatoires *X* et *Y* sont **indépendantes** ssi "les évènements qu'elles permettent de mesurer le sont", c'est-à-dire ssi :

$$\forall A \text{ et } B \in ?\ , P(X \in A \text{ et } Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$
$$\Leftrightarrow I \text{ et } J \text{ intervalles}, P(X \in I \text{ et } Y \in J) = P(X \in I)P(Y \in J)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \text{ et } y, P(X < x \text{ et } Y < y) = P(X < x)P(Y < y)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \text{ et } y, F_{(X,Y)}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \text{ (par définition de } F)$$

Cas discret
Si X et Y sont discrètes, elles sont indépendantes ssi

$$\forall i \text{ et } j, P(X = i \text{ et } Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$
$$\Leftrightarrow \forall i \text{ et } j, p_{ij} = p_{i.}\,p_{.j}$$

Cas absolument continu
Si X et Y sont absolument continues (avec densité), elles sont indépendantes ssi

$$\forall x \text{ et } y,\ f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

Remarque : Alors que dans le cas général la connaissance des marginales (c'est-à-dire des lois de X et de Y) ne permet pas de déterminer la loi du couple (X,Y), **dans le cas de deux variables aléatoires indépendantes**, les lois de X et de Y déterminent entièrement la loi du couple.

Toutes les propriétés ci-dessus sont des conditions nécessaires et suffisantes d'indépendance. Celles qui suivent sont seulement des conséquences de l'indépendance mais ne sont pas suffisantes.

Si *X* et *Y* sont indépendantes, alors on a :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
$$Var(X+Y) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y)$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$$

Dans le cas discret, une autre conséquence de l'indépendance est que :

$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ où $G_X(s)$ est la fonction génératrice de la loi de X.

Dépendance-loi conditionnelle

Si A et B sont deux évènements quelconques non impossibles, on définit deux **nouvelles lois de probabilité** en posant :

$$P(B/A) = \text{Probabilité que } B \text{ soit réalisé sachant que } A \text{ l'est}$$
$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

et

$$P(A/B) = \text{Probabilité que } A \text{ soit réalisé sachant que } B \text{ l'est}$$
$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ces définitions s'écrivent aussi : $P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B)$.

On en déduit une autre définition de l'indépendance :

A et *B* sont indépendants ssi $P(B/A) = P(B)$ ou $P(A/B) = P(A)$.

L'application $B \to P(B/A)$ est une probabilité, qu'on peut noter P^A ou P_A. Cela correspond à un changement d'univers et à une renormalisation pour que $P_A(A) = P(A/A) = 1$.

On définit aussi **la loi conditionnelle de X sachant Y** et **la loi conditionnelle de Y sachant X** dans les deux cas suivants : le couple (*X*,*Y*) est discret **ou** le couple (*X*,*Y*) est donné par sa densité.

Cas discret

Pour chaque $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$, on pose :

$$P(X = i / Y = j) = \frac{P(X = i, Y = j)}{P(Y = j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P(Y = j / X = i) = \frac{P(X = i, Y = j)}{P(X = i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

Pour *j* fixé et *i* variant dans $X(\Omega)$, la première égalité donne la loi de *X* sachant (*Y*=*j*), et réciproquement.

Cas absolument continu

La loi conditionnelle de *X* sachant (*Y*=*y*) (resp. de *Y* sachant (*X*=*x*)) est donnée par la **densité conditionnelle** :

$$f_X^{(Y=y)} = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(Y)} \text{ (resp. } f_Y^{(X=x)} = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} \text{).}$$

L'expression "sachant (*X*=*x*)" ou "sachant (*Y*=*y*)" est en quelque sorte un abus de langage puisque dans ce cas $P(X=x)=P(Y=y)=0$. Il faut comprendre "comme limite quand $h \to 0$ de $(x < X < x + h)$".

On notera enfin que si *X* et *Y* sont indépendantes, les lois conditionnelles sont égales à leurs lois marginales.

Espérance conditionnelle

L'espérance de la loi de X sachant (Y=y) – dans le cas discret ou continu – est calculée comme d'habitude à partir de la loi conditionnelle. C'est une fonction de y. Si dans l'expression trouvée, on remplace y par Y, on obtient une variable aléatoire appelée **espérance conditionnelle de *X* sachant *Y***.

Cas particulier du couple Gaussien

Une variable aléatoire gaussienne (on normale) $N(m\,,s^{\,2})$ a une densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{s\,\sqrt{2p}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2}$$

Un **couple (*X, Y*) est gaussien** si et seulement si toute combinaison linéaire de la forme $aX + bY$ est une variable gaussienne.

Si un couple gaussien (X, Y) n'est pas dégénéré (c'est-à-dire, si (X,Y)(W) n'est pas contenu dans une droite $\Re^2$-presque partout ou, en d'autres termes, si $r \neq \pm 1$), le couple (X, Y) admet une densité de la forme :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{cste}\,e^{-\frac{1}{2}(a x^2+2bxy+gy^2+dx+ey)} \quad (*)$$

Attention : Si X et Y sont gausiennes, on ne sait en général pas si le couple (X, Y) l'est, **sauf** dans le cas de 2 variables indépendantes, puisque alors la densité du couple étant le produit des densités, on a :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{s\,\sqrt{2p}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2}\;\frac{1}{s\,'\sqrt{2p}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-m\,'}{s\,'}\right)^2}$$

et f est de la forme (*).

Si en général, le fait que la covariance soit nulle n'implique pas que les variables aléatoires soient indépendantes, **une propriété très importante des couples gaussiens** est que :

Si (X, Y) est un couple gaussien et si Cov(X,Y) = 0, alors X et Y sont indépendantes.

On vérifie en effet que si Cov(X,Y), la densité du couple s'écrit comme le produit des marginales ($f_X(x)$ $f_Y(Y)$) car le terme b = 0).