CONCEPTS DE BASE – DÉFINITIONS DIVERSES

Remarques : les intégrales sans bornes sont à comprendre de -8 à +8 .

Espérance

- cas discret : $E(X) = \sum_k a_k p_k$

- cas continu : $E(X) = \int xf(x)dx$

Propriétés :

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$
$$E(lX) = lE(X), \forall\, l \in \Re$$
$$X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$$
$$E(b) = b \text{ si } b \text{ est une constante}$$
$$E(XY) = E(X)E(Y) \text{ si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes (cfr infra)}$$

Variance (dispersion au carré)

$V(X)$ ou $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

- cas discret : $= \sum a_k^2 p_k - \left(\sum a_k p_k\right)^2$

- cas continu : $= \int x^2 f(x)dx - \left(E(X)\right)^2$

Propriétés :

$V(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque partout, c'est-à-dire sauf sur un ensemble de probabilité nulle.

$$V(lX) = l^2 V(X)$$

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes ($Var(X-Y)$ est dans ce cas égal à $Var(X) + Var(Y)$).

Ecart-type (dispersion)

$$s(X) = \sqrt{V(X)}$$

Moment d'ordre k

Les moments d'ordre k se définissent comme : $m_k = E(X^k)$. Le moment d'ordre 1 est l'espérance.

Si la loi de X est symétrique, c'est-à-dire si sa densité est une fonction paire, alors tous les moments impairs de X sont nuls.

Moment centré d'ordre k

$$m_k = E\left(\left[X - E(X)\right]^k\right)$$

Le moment centré d'ordre 2 est la variance.

Fonction génératrice

Pour les variables aléatoires à valeurs dans N, on définit la fonction génératrice de la manière suivante : $G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k \in N} s^k \Pr(X = k)$.

Propriétés

$G_X(1) = 1$

G_X est définie au moins sur $[0,1]$

G_X est croissante, convexe, indéfiniment dérivable sur $[0,1]$

G_X caractérise la loi de X, car $\Pr(X = x) = \dfrac{G_X^k(0)}{k!}$ (car $G_X(s) = \sum \dfrac{G^k(0)}{k!} s^k$

$G_X^{'}(1) = \sum k p_k = E(X)$ car $G_X^{'}(s) = \sum k s^{k-1} \Pr(X = k)$

$G_X^{''}(1) = \sum k(k-1) p_k = E(X^2) - E(X)$

En prenant les dérivées succesives de G_X en 1, on obtient tous les moments de X.

Inégalités classiques

- **Inégalité de Markov**

$$\Pr(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^k)}{t^k}, \forall k \in N, \text{si } E(|X|^k) \text{ est fini et } t > 0.$$

$$\text{Si } X > 0, \Pr(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchébichev**

$$\Pr(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

- **Inégalité de Jensen**

Si f est une fonction convexe de $\Re$ dans $\Re$, $f(E(X)) \leq E(f(X))$