DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉS USUELLES

Convention : Si la variable aléatoire (v.a.) *X* suit la loi *L*, on notera *X* → *L*.

Lois discrètes

1. Loi Uniforme : *U*

La loi *U* est définie sur des entiers $\{1,\ldots,n\}$ ou des valeurs $\{a_A,\ldots,a_n\}$ avec la même probabilité pour toutes les valeurs $P(X = a_i) = \frac{1}{n}$. Si Ω est fini et si $A \subset \Omega$, alors $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

Espérance : $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Variance : $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

2. Loi de Bernouilli : *B(1,p)*

On utilise cette variable aléatoire lorsque les résultats possibles d'une épreuve aléatoire sont réduits à deux : oui/non, vrai/faux, succès/échec. On parle dans ce cas d'expérience de Bernouilli. Une v.a. *X* suit une loi *B(1,p)* si elle prend deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités suivantes :

$$P(X = 1) = p$$
$$P(X = 0) = 1 - p = q$$

loi que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

$P(X = x) = p^x (1-p)^x$ avec $x \in \{0,1\}$

Espérance : $E(X) = p$

Variance : $V(X) = p(1-p)$

Démonstration : comme $X^2 = X, E(X^2) = E(X) = p$ et
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$

Fonction génératrice : $G(s) = E\left(s^X\right) = q + ps$

3. Loi Binomiale : *B(n,p)*

Cette v.a. peut se définir comme le nombre de "succès" à l'issue de n expériences de Bernouilli indépendantes et de même loi. Une v.a. *X* suit une loi binomiale *B(n,p)*si elle prend les (n+1) valeurs 0,1,2,…, n avec les probabilités :

$P(X = x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ où $x \in \{0,1,...,n\}$

Construction : si n v.a. indépendantes $X_1,X_2, \ldots X_n$ suivent la même loi *B(1,p)*, alors une v.a. $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi Binomiale *B(n,p)*.

Une procédure pour simuler une binomiale est de repartir d'une loi de Bernouilli de paramètre s (probabilité de succès) et d'appliquer la définition de la binomiale sur le résultat de n tirages dans la loi de Bernouilli :

- on effectue n tirages dans une loi uniforme 0, 1;
- à chaque tirage est associé une valeur de succès selon la règle suivante : si x (la valeur issue du tirage) est inférieure ou égale à s, le tirage est un succès; sinon, il s'agit d'un échec;
- on compte le nombre de succès obtenus;

Le nombre de succès ainsi obtenu respecte une loi binomiale avec probabilité de succès égale à s et nombre de tirages égale à n.

Espérance : $E(X) = np$

Variance : $V(X) = np(1-p)$

Fonction génératrice : $G(s) = (q + ps)^n$

Addition : si deux v.a. indépendantes X_1 et X_2 suivent respectivement les lois $B(n_1,p)$ et $B(n_2,p)$, alors $X=X_1+X_2$ suit une loi $B(n_1+n_2,p)$.

Probabilité d'observer *s* succès :

La probabilité d'observer *s* succès pour *n* tirages, sachant que *p* est la probabilité de succès est alors :

$$p(X = s) = \frac{n!}{s!(n-s)!} p^s (1-p)^{n-s} .$$

Approximation (convergence en loi) : lorsque *n* est grand :

- si *n*>30 : si *np* et *np(1-p)* sont voisins et si *np* £ 15, on peut alors approximer la loi *B(n,p)* par une loi de Poisson *P(l)* où *l=np*.
- si *np*>15 et *n(1-p)* > 15 (ou si *np(1-p)* > 5), on approximer la loi *B(n,p)* par une loi *Normale* où *m=np* et s^2*=np(1-p)*.

4. Loi Géométrique : *G(p)*

Cette v.a. peut se définir comme le nombre d'essais jusqu'au premier succès pour des épreuves de Bernouilli indépendantes de paramètre p :

$P(X = x) = p(1-p)^{x-1}$ où $x \in N^*$.

Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{p}$

Variance : $V(X) = \dfrac{(1-p)}{p^2}$

Fonction génératrice : $G(s) = \dfrac{sp}{1-qs}$ où $q = 1-p$

NB : On définit quelquefois la variable Géométrique comme le nombre d'échecs avant le premier succès. Dans ce cas, elle prend ses valeurs dans *N*,

$$P(X = x) = p(1-p)^x, x \in N, E(X) = \frac{1}{p} - 1 \text{ et } V(X) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

5. Loi de Poisson : *P(l)*

Une v.a. *X* suit une loi de Poisson si elle prend ses valeurs dans *N* avec les probabilités :

$$P(X = x) = e^{-l} \frac{l^x}{x!} \text{ où } x \in N \text{ et } l > 0$$

Espérance et variance : $E(X) = V(X) = l$

Fonction génératrice : $G(s) = e^{l(s-1)}$

Addition :
Si deux v.a. indépendantes suivent respectivement des lois $P(l_1)$ et $P(l_2)$, alors la v.a. $X=X_1+X_2$ suit une loi de Poisson $P(l_1+l_2)$.

Lois continues

6. Loi Uniforme : *U(a,b)*

Une v.a. *X* suit une loi Uniforme sur l'intervalle [*a*,*b*] si *X* est une v.a. continue de densité *f* constante :

$f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a,b]$
$f(x) = 0$ si $x \notin [a,b]$

Espérance : $E(X)=\frac{a+b}{2}$

Variance : $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$

Prenons le cas d'une uniforme 0,1 : E(X)=0.5 et donc $(E(X))^2=0.25$. $E(X^2)=\int_0^1 X^2 f(x)dx=\frac{1}{3}$, sachant que $\int x^2dx=\frac{x^3}{3}$ et que $f(x)=1$. La variance d'une uniforme 0,1 est donc 1/12 (soit 1/3 - 1/4).

Fonction de répartition pour *U(0,a)*

$F(x)=\frac{x}{a}$ sur $[0,a]$, $F(x)=0$ sur $[-\infty,0[$ et $F(x)=1$ sur $[a,\infty]$

7. Loi exponentielle : $E(l)$

Une variable aléatoire *X* suit une loi $E(l)$ si elle est continue et de densité :

$f(x)=l\ \ e^{-lx}$ pour $x\in R^+$

Espérance : $E(X)=\frac{1}{l}$

Variance : $V(X)=\frac{1}{l^2}$

8. Loi Laplace-Gauss ou Loi Normale : $N(m,s)$

Une v.a. *X* suit une loi $N(m,s)$ si elle est continue et de densité :

$$f(x)=\frac{1}{s\ \ \sqrt{2p}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2}\ \text{pour } x\in R$$

Espérance : $E(X)=m$

Variance : $V(X)=s^{\ 2}$

Lecture de table : une v.a. *X* de loi $N(m,s)$ peut se mettre sou la forme suivante :

$X \rightarrow N(m,s) \Leftrightarrow U=\frac{X-m}{s} \rightarrow N(0,1)$, loi centrée réduite qui est tabulée. On a donc :

$$P(X < x) = P\left(U < \frac{X - m}{s}\right)$$

Addition
Si deux v.a. indépendantes suivent respectivement des lois Normales $N(m_1, s_1^2)$ et $N(m_2, s_2^2)$, la v.a. $X_1 + X_2$ suit une lois $N(m_1 + m_2, s_1^2 + s_2^2)$.

Combinaison linéaire
On démontre que si $X_1, X_2, \dots X_n$ suivent des lois Normales **indépendantes** d'espérances $\mu_1, \dots \mu_n$, de variances $\sigma_1 \dots \sigma_n$, alors pour tous $\lambda_i \in R$, $\sum_{i=1}^{n} l_i X_i$ suit une loi Normale d'espérance $\sum_{i=1}^{n} l_i m_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{n} l_i^2 s_i^2$.

Valeurs remarquables :

P(μ - 1.64 σ < X < μ + 1.64 σ) = 0.9
P(μ - 1.96 σ < X < μ + 1.96 σ) = 0.95
P(μ - 3.09 σ < X < μ + 3.09 σ) = 0.998

Construction
Comme on ne connaît pas la forme de la fonction inverse de la fonction de densité d'une distribution normale, on utilise le Théorême Central Limite (une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi suit une distribution normale pour autant que les variables en question suivent une distribution d'espérance et de variance finies) pour simuler un tirage dans une normale standardisée à partir d'une série de tirages dans une uniforme 0,1. La procédure à suivre est la suivante :

- effectuer 12 tirages indépendants dans la loi uniforme 0,1
- sommer les 12 tirages
- retirer 6 au résultat obtenu

Les nombres ainsi obtenus suivent une distribution normale N(0,1).

→ Lois de variables aléatoires liées à des variables aléatoires normales

9. Loi log-normale

Une variable aléatoire suit une loi log-normale lorsque le logarithme népérien de la variable en question suit une loi normale : $\ln(X) = N(m, s)$. L'espérance de X est $E(X) = e^{(m + \frac{s^2}{2})}$ et la variance de X est $V(X) = e^{(2m + s^2)} e^{s^2 - 1}$.

10. Loi du Chi Deux : χ^2_n (khi-2 à n degrés de libertés)

Soit $U_1, U_2, \ldots U_n$, n v.a. indépendantes et de même loi $N(0,1)$. La v.a. $Z = \sum_{i=1}^{n} U_i^2$ soit une loi χ^2_n.

Espérance : $E(\chi^2_n) = n$

Variance : $V(\chi^2_n) = 2n$

Addition
Si Y_1 et Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes et de loi respectives χ^2_{n1} et χ^2_{n2}, $Y_1 + Y_2$ suit une loi de χ^2_{n1+n2}.

Approximation
Lorsque n est grand (>30), la loi de la v.a. $\sqrt{2c_n^2} - \sqrt{2n-1}$ peut être approximée par une loi Normale $N(0,1)$.

11. Loi de Student : T_n (Student à n degrés de libertés)

Soit X et Y, deux v.a. indépendantes telles que X suit une loi $N(0,1)$ et Y suit une loi de χ^2_n, alors la v.a. $\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ suit une loi T_n avec $E(T_n)=0$.

Approximation
Lorsque n est grand (> 60), la loi T_n peut être approximée par une loi Normale centrée réduite $N(0,1)$.

12. Loi de Fisher-Snedecor : $F(n_1,n_2)$

Soit X_1 et X_2, deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives χ^2_{n1} et χ^2_{n2}, alors la variable aléatoire $\frac{X_1 / n_1}{X_2 / n_2}$ suit une loi $F(n_1,n_2)$ à n_1 et n_2 degrés de liberté.

→ **Lois de variables aléatoires liées à la loi Expentielle**

13. Loi Gamma : $\gamma(\alpha,\lambda)$

Une variable aléatoire suit une loi Gamme de paramètre α et λ (pour α et λ positifs) si X est une variable aléatoire continue de densité f :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{l^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-la}, \text{ pour } x \geq 0 \\ f(x) = 0, \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

où $\Gamma(a)$ est une constante de normalisation, définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

(cette intégrale est convergente pour $\alpha>0$, si $\alpha \in N$ ($\Gamma(a) = (a-1)!$).

Espérance : $E(X) = \frac{a}{l}$

Variance : $V(X) = \frac{a}{l^2}$

Addition
Si deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes suivent respectivement des lois $\gamma(\alpha_1,\lambda)$ et $\gamma(\alpha_2,\lambda)$, alors X_1+X_2 suit une loi $\gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.

Relation entre les différentes lois

La loi $E(l)$ n'est autre que la loi $\gamma(1,\lambda)$.

La somme de n variables aléatoires idépendantes de paramètre λ suit une loin $\gamma(n,\lambda)$.

De même, la loi $\chi^2_{(1)}$ n'est autre que la loi $?(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et par conséquent, la loi $\chi^2_{(n)}$ se confond avec la loi $?(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$.

Propriétés de multiplication par une constante
Si une variable aléatoire X suit une loi $\gamma(\alpha,\lambda)$ et si μ est un scalaire positif, alors μX suit une loi $?(a,\frac{?}{\mu})$. Par conséquent, si X suit une loi $\gamma(n,\lambda)$, $2\lambda X$ suit une loi $\gamma(n,\frac{1}{2})$, c'est-à-dire une loi $\chi^2_{(2n)}$. On peut donc se servir des tables χ^2 pour les sommes de variables aléatoires exponentielles indépendantes.