Annexe 1 : La frontière efficiente

- Hypothèse :
  - marché efficient
  - achats et ventes à découvert autorisés
- Démonstration
  - Problème : $$Max\,\Theta = \frac{\overline{R}_p - R_F}{s_p}$$ $$sc \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$
  - Sachant que : $$R_F = 1R_F = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) R_F = \sum_{i=1}^{N} X_i R_F$$
  - On peut donc réécrire la fonction objectif : $$\Theta = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i(\overline{R}_i - R_F)}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 s_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, j\neq i}^{N} X_i X_j s_{ij}\right]}}$$
  - Il faut alors dériver par rapport aux Xi et annuler les dérivées premières : $$\frac{d\Theta}{dX_i} = 0$$
  - Le résultat est (cfr Annexe B, p. 111) : $$\frac{d\Theta}{dX_i} = -(lX_1 s_{1i} + lX_2 s_{2i} + \ldots + lX_N s_{Ni}) + \overline{R}_i - R_F = 0$$ $$où\ l = \frac{(\overline{R}_p - R_F)}{s_p^2}$$

Elton et Gruber, Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 5°ed, Wiley, 1995

– On obtient un système de N équations simultanées à N inconnues (N étant le nombre d 'actifs) de la forme :

$$\overline{R}_i - R_F = l\, s_{1i} + l\, s_{2i} + \ldots + l\, s_{Ni}$$

L 'approche proposée par Elton et Gruber permet d 'éviter de passer par un Lagrangien. Si l 'on ajoute des contraintes sur les Xi (par exemple, pas de vente à découvert), le problème devient plus complexe. Sa formulation est la suivante :

$$Max\,\Theta = \frac{\overline{R}_p - R_F}{s_p}$$

$$sc \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$et\ X_i \geq 0$$

Les contraintes sont linéaires mais la fonction objectif ne l 'est plus. σp contient en effet des termes en X_i^2 et $X_i X_{\cdot j}$ Il s 'agit donc d 'une fonction quadratique. Ce type de problème est très bien résolu soit par l 'approche de Kuhn-Tucker (qui permet de tenir des contraintes d 'inégalité), soit par les algorithmes d 'optimisation numériques disponibles.