4. Fama, MacBeth : Risk, Return and Equilibrium : Empirical Tests

- Support théorique
  - Fama et MacBeth étudient un modèle à deux facteurs (dont le C.A.P.M. peut être considéré comme un cas d 'application.
  - Fama et MacBeth partent de l 'hypothèse général selon laquelle les rendements sont distribués normalement. Dans ces conditions :
    - Le risque d 'un portefeuille est :

$$s\left(\tilde{R}_p\right)=\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ip}x_{jp}s_{ij}}{s\left(\tilde{R}_p\right)}=\sum_{i=1}^{N}x_{ip}\left[\frac{\sum_{j=1}^{N}x_{jp}s_{ij}}{s\left(\tilde{R}_p\right)}\right]=\sum_{i=1}^{N}x_{ip}\frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)}{s\left(\tilde{R}_p\right)}$$

    - La contribution de l 'actif i au risque du portefeuille est donc proportionnelle à :

$$\sum_{i=1}^{N}x_{jp}\frac{s_{ij}}{s(\tilde{R}_p)}=\frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i,\tilde{R}_p)}{s(\tilde{R}_p)}$$

    - Les portefeuilles efficients se caractérisent par :

$$Max\, E(\tilde{R}_m)=\sum_{i=1}^{N}x_{im}E(\tilde{R}_i)$$

$$sc\; s(\tilde{R}_p)=s(\tilde{R}_m)$$

$$et\sum_{i=1}^{N}x_{im}=1$$

– En passant par un Lagrangien, on peut en déduire la relation suivante entre le risque et le rendement :

$$E(\tilde{R}_i) - E(\tilde{R}_m) = S_m \left[\frac{\sum_{j=1}^{N} x_{jm} s_{ij}}{s(\tilde{R}_m)} - s(\tilde{R}_m) \right]$$

- où S_m est la pente de la frontière efficiente au point m (taux de changement de l 'espérance de rendement lorsque le risque change d 'une unité).

– Cette équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$E(\tilde{R}_i) = \left[E(\tilde{R}_m) - S_m s(\tilde{R}_m) \right] + S_m s(\tilde{R}_m) b_i$$

$$où\ b_i = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_m)}{s^2(\tilde{R}_m)} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{jm} s_{ij}}{s^2(\tilde{R}_m)}$$

- où β_i est la mesure de la contribution de l 'actif i au portefeuille m,
- où $\left[E(\tilde{R}_m) - S_m s(\tilde{R}_m) \right]$ (l 'ordonnée à l ' origine) est le rendement d 'un actif dont le β est nul (et qui est en ce sens sans risque, sans toutefois que cela n 'implique que sa variance soit nulle).

– Partant de cette dernière expression, on peut en déduire la valeur de S_m :

$$S_m = \frac{E(\tilde{R}_m) - E(\tilde{R}_0)}{s(\tilde{R}_m)}$$

- On en déduit donc :

$$E(\tilde{R}_i) = E(\tilde{R}_0) + \left[E(\tilde{R}_m) - E(\tilde{R}_0)\right]\beta_i$$

- Ce raisonnement montre donc que, sans supposer l 'existence de la possibilité d 'emprunter et de prêter sans limite au taux sans risque, il existe une relation linéaire entre le rendement et le risque.
  - On notera que si l 'on suppose la possibilité de prêter et d 'emprunter sans limite au taux sans risque, on retombe naturellement sur le CAPM (Sharpe et Litner) en choisissant comme portefeuille à β nul le taux dans risque :

$$E(\tilde{R}_i) = R_F + \left[E(\tilde{R}_m) - R_F\right]\beta_i$$

- Le modèle testé par les auteurs est le suivant :

$$\tilde{R}_{it} = \tilde{\gamma}_{0t} + \tilde{\gamma}_{1t}\beta_i + \tilde{\gamma}_{2t}\beta_i^2 + \tilde{\gamma}_{3t}\sigma_i + \tilde{\eta}_{it}$$

  - Si le modèle à deux facteurs est validé, alors les résultats suivants doivent être obtenus :
    - γ_{1t} doit être positif (estimation de la prime de risque)
    - l 'espérance de γ_{2t} doit être nulle
    - l 'espérance de γ_{3t} doit être nulle

– La mesure du risque systématique est tirée du modèle de marché :

$$\tilde{R}_{it} = a_i + b_i \tilde{R}_{mt} + \tilde{e}_{it}$$
$$s^2(\tilde{R}_i) = b_i^2 s^2(\tilde{R}_m) + s^2(\tilde{e}_i) + 2b_i \operatorname{cov}(\tilde{R}_m, \tilde{e}_i)$$
$$et \operatorname{cov}(\tilde{R}_m, \tilde{e}_i) = 0$$

– On peut donc affirmer que la variance des résidus du modèle de marché est bien une mesure de la part du risque qui n ’est pas fonction de β.

– Si le marché est efficient, les observations suivantes devraient être faites :
  - les coefficients $\gamma_{1t}, \gamma_{2t}, \gamma_{3t}$ devrait avoir un comportement de type *fair games*
  - les coefficients γ_{2t} et γ_{3t} devraient avoir une espérance nulle.

- La période observée :

TABLE 1

PORTFOLIO FORMATION, ESTIMATION, AND TESTING PERIODS

	Periods								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Portfolio formation period ...	1926–29	1927–33	1931–37	1935–41	1939–45	1943–49	1947–53	1951–57	1955–61
Initial estimation period	1930–34	1934–38	1938–42	1942–46	1946–50	1950–54	1954–58	1958–62	1962–66
Testing period	1935–38	1939–42	1943–46	1947–50	1951–54	1955–58	1959–62	1963–66	1967–68
No. of securities available	710	779	804	908	1,011	1,053	1,065	1,162	1,261
No. of securities meeting data requirement	435	576	607	704	751	802	856	858	845

- Les données :
  - l ’ensemble des actions cotées sur le NYSE
  - le portefeuille de marché : indice équipondéré des rendements de tous les titres
  - utilisation de données mensuelles

- La méthode :
  - calcul des β des actifs financiers sur une première fenêtre de 4 ans
  - classement des actifs financiers par ordre de β
  - formation de 20 portefeuilles contenant le même nombre d 'actifs financiers
  - recalcul des β des actifs financiers sur les cinq années qui suivent (afin d 'éviter que les portefeuilles à β important ne concentrent les titres pour lesquels le β est sur-estimé et vice-versa) et détermination des β des portefeuilles chaque mois durant cette période de 5 ans (le β d 'un portefeuille étant la moyenne arithmétique des β des actifs financiers qui le compose). Cette procédure permet de tenir des entrées et sorties des actifs financiers sur le marché.
  - L 'approche suivie est bien prédictive au sens où les variables explicatives (β, …) sont calculées sur des périodes antérieures au mois de calcul des rendements des portefeuilles (on prévoit à partir de l 'information disponible en t ce qui se passe en t+1).

- Les résultats
  - L 'estimation des β des portefeuilles est bien meilleure que l 'estimation des β des actifs financiers individuels

TABLE 2

SAMPLE STATISTICS FOR FOUR SELECTED ESTIMATION PERIODS

Statistic	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	Portfolios for Estimation Period 1934–38									
$\hat{\beta}_{p,t-1}$	.322	.508	.651	.674	.695	.792	.921	.942	.970	1.005
$s(\hat{\beta}_{p,t-1})$	.027	.027	.025	.023	.028	.026	.032	.029	.034	.027
$r(R_p, R_m)^2$	.709	.861	.921	.936	.912	.941	.932	.946	.933	.958
$s(R_p)$	.040	.058	.072	.074	.077	.087	.101	.103	.106	.109
$s(\hat{e}_p)$	.022	.022	.020	.019	.023	.021	.026	.024	.028	.022
$\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.085	.075	.083	.078	.090	.095	.109	.106	.111	.097
$s(\hat{e}_p)/\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.259	.293	.241	.244	.256	.221	.238	.226	.252	.227
	Portfolios for Estimation Period 1942–46									
$\hat{\beta}_{p,t-1}$	.467	.537	.593	.628	.707	.721	.770	.792	.805	.894
$s(\hat{\beta}_{p,t-1})$	.045	.041	.044	.037	.027	.032	.035	.035	.028	.040
$r(R_p, R_m)^2$	.645	.745	.753	.829	.919	.898	.889	.898	.934	.896
$s(R_p)$	.035	.037	.041	.041	.044	.046	.049	.050	.050	.057
$s(\hat{e}_p)$	.021	.019	.020	.017	.013	.015	.016	.016	.013	.018
$\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.055	.055	.063	.058	.058	.063	.064	.064	.062	.069
$s(\hat{e}_p)/\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.382	.345	.317	.293	.224	.238	.250	.250	.210	.261
	Portfolios for Estimation Period 1950–54									
$\hat{\beta}_{p,t-1}$	.418	.590	.694	.751	.777	.784	.929	.950	.996	1.014
$s(\hat{\beta}_{p,t-1})$	.042	.047	.045	.037	.038	.035	.050	.038	.035	.029
$r(R_p, R_m)^2$	.629	.723	.798	.872	.878	.895	.856	.913	.933	.954
$s(R_p)$	.019	.025	.028	.029	.030	.030	.036	.036	.037	.038
$s(\hat{e}_p)$	.012	.013	.013	.010	.010	.010	.014	.011	.010	.008
$\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.040	.044	.046	.048	.051	.051	.052	.053	.054	.057
$s(\hat{e}_p)/\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.300	.295	.283	.208	.196	.196	.269	.208	.185	.140
	Portfolios for Estimation Period 1958–62									
$\hat{\beta}_{p,t-1}$	.626	.635	.719	.801	.817	.860	.920	.950	.975	.995
$s(\hat{\beta}_{p,t-1})$	.043	.048	.039	.046	.047	.033	.037	.038	.032	.037
$r(R_p, R_m)^2$	.783	.745	.851	.835	.838	.920	.913	.915	.939	.925
$s(R_p)$	.030	.031	.033	.037	.038	.038	.041	.042	.043	.044
$s(\hat{e}_p)$	.014	.016	.013	.015	.015	.011	.012	.012	.011	.012
$\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.049	.052	.056	.059	.064	.061	.070	.069	.068	.064
$s(\hat{e}_p)/\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$	.286	.308	.232	.254	.234	.180	.171	.174	.162	.188

$s(\hat{e}_p)$: écart - type des résidus du modèle de marché appliqué aux portefeuil les

$\bar{s}_{p,t-1}(\hat{e}_i)$: moyenne des écarts types du modèle de marché appliqués aux actifs financiers

- Les résultats obtenus ne remettent pas en cause le modèle à deux facteurs et l 'hypothèse d 'efficience :
  - le risque systématique a une influence instable et peu significative de période à période
  - l 'influence de β^2 est également faible et instable.
  - les coefficients de corrélation entre les estimations successives des coefficients γ sont faibles en valeur absolue (et en général faible en terme significativité statistique), ce qui confirme l 'hypothèse d 'efficience de marché (approche *fair games)*
  - enfin, l 'estimation de γ est significativement plus faible que l 'écart entre le taux de rendement du marché et le taux sans risque, ce qui tend à infirmer le CAPM comme modèle générateur des rendements :

TABLE 4

THE BEHAVIOR OF THE MARKET

PERIOD	STATISTIC*								
	$\overline{R_m}$	$\overline{R_m - R_f}$	$\bar{\hat{\gamma}}_1$	$\bar{\hat{\gamma}}_0$	$\overline{R_f}$	$\frac{\overline{R_m - R_f}}{s(R_m)}$	$\frac{\bar{\hat{\gamma}}_1}{s(R_m)}$	$s(R_m)$	$s(R_m)$
1935–6/68	.0143	.0130	.0085	.0061	.0013	.2136	.1388	.061	.066
1935–45	.0197	.0195	.0163	.0039	.0002	.2207	.1844	.089	.098
1946–55	.0112	.0103	.0027	.0087	.0009	.2378	.0614	.043	.041
1956–6/68	.0121	.0095	.0062	.0060	.0026	.2387	.1560	.040	.044
1935–40	.0132	.0132	.0109	.0024	.0001	.1221	.1009	.108	.116
1941–45	.0274	.0272	.0229	.0056	.0002	.4715	.3963	.058	.069
1946–50	.0077	.0070	.0029	.0050	.0007	.1351	.0564	.052	.047
1951–55	.0148	.0136	.0024	.0123	.0012	.4174	.0735	.033	.035
1956–60	.0090	.0070	−.0059	.0148	.0020	.2080	−.1755	.034	.034
1961–6/68	.0141	.0111	.0143	.0001	.0030	.2567	.3294	.043	.048