Croissance et Modèles d'évaluation de type RIV

Michel LEVASSEUR
Décembre 2006

1. Un cadre de modélisation

Notons E_t le résultat net attendu en t, B_t la valeur comptable des capitaux propres au début de la période t (ou encore à la fin de la période t-1) et r le coût des fonds propres. Le résultat résiduel w_t défini comme par OHLSON (1995) est décrit à l'équation (1.1) :

$$w_t = E_t - r \cdot B_t \tag{1.1}$$

La croissance de la valeur des capitaux comptables est décrite par l'équation (1.2). Elle a deux composantes : un taux de croissance à long terme c-1 et une croissance de court terme x_t:

$$B_t = c \cdot B_{t-1} + x_t \tag{1.2}$$

La dynamique du résultat résiduel est décrite par l'équation (1.3). Elle suppose que la richesse secrétée par les actifs en place suit un processus autorégressif avec un coefficient γ. La croissance est également source de création de richesse.

$$w_t = \gamma \cdot w_{t-1} + \alpha \cdot x_{t-1} + \delta \cdot (c-1) \cdot B_{t-1} \tag{1.3}$$

Enfin, le terme de croissance à court terme x_t est décrit par l'équation (1.4).

$$x_t = \eta \cdot x_{t-1} \tag{1.4}$$

Pour résumer, la dynamique des variables w_t, , B_t et x_t est complètement décrite par l'équation (1.5) en utilisant la matrice triangulaire de transition suivante:

$$\begin{bmatrix} w_t & B_t & x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \delta \cdot (c-1) & \alpha \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_{t-1} \\ B_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Posons la matrice $\begin{bmatrix} \lambda-\gamma & -\delta \cdot (c-1) & -\alpha \\ 0 & \lambda - c & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-\eta \end{bmatrix}$. Son déterminant est $(\lambda-\gamma)\cdot(\lambda-c)\cdot(\lambda-\eta)$.

L'équation caractéristique de la matrice de transition est donc :

$$(\lambda-\gamma)\cdot(\lambda-c)\cdot(\lambda-\eta) = 0 \tag{1.6}$$

Les valeurs propres de la matrice de transition sont à l'évidence γ, c et η.

Les vecteurs propres sont des solutions des équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\delta\cdot(c-1) & -\alpha \\ 0 & \gamma-c & -1 \\ 0 & 0 & \gamma-\eta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c-\gamma & -\delta\cdot(c-1) & -\alpha \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & c-\eta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta\cdot(c-1) \\ c-\gamma \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} \eta-\gamma & -\delta\cdot(c-1) & -\alpha \\ 0 & \eta-c & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=0 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\delta\cdot(c-1)+\alpha\cdot(\eta-c)}{\eta-\gamma} \\ 1 \\ \eta-c \end{bmatrix}$$

On peut donc diagonaliser la matrice de transition en utilisant la matrice R des vecteurs propres :

$$R=\begin{bmatrix} 1 & \delta\cdot(c-1) & \dfrac{\delta\cdot(c-1)+\alpha\cdot(\eta-c)}{\eta-\gamma} \\ 0 & c-\gamma & 1 \\ 0 & 0 & \eta-c \end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

et son inverse :

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\delta\cdot(c-1)}{c-\gamma} & \dfrac{\delta\cdot(c-1)-\alpha\cdot(c-\gamma)}{(c-\gamma)\cdot(\eta-c)} \\ 0 & \dfrac{1}{c-\gamma} & -\dfrac{1}{(c-\gamma)\cdot(\eta-c)} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\eta-c} \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

En effet, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \gamma & \delta\cdot(c-1) & \alpha \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}=R\cdot\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}\cdot R^{-1} \qquad (1.10)$$

En introduisant (1.8), (1.9), (1.10) dans (1.5), on obtient par récurrence :

$$\begin{bmatrix} w_t & B_t & x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta\cdot(c-1) & \frac{\delta\cdot(c-1)+\alpha\cdot(\eta-c)}{\eta-\gamma} \\ 0 & c-\gamma & 1 \\ 0 & 0 & \eta-c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \gamma^{t-1} & 0 & 0 \\ 0 & c^{t-1} & 0 \\ 0 & 0 & \eta^{t-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\delta\cdot(c-1)}{c-\gamma} & \frac{\delta\cdot(c-1)-\alpha\cdot(c-\gamma)}{(c-\gamma)\cdot(\eta-c)} \\ 0 & \frac{1}{c-\gamma} & -\frac{1}{(c-\gamma)\cdot(\eta-c)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta-c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ B_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$\begin{bmatrix} w_t & B_t & x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^{t-1} & \frac{\delta\cdot(c-1)}{c-\gamma}\cdot\left(c^{t-1}-\gamma^{t-1}\right) & \gamma^{t-1}\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)-\alpha\cdot(c-\gamma)}{(c-\gamma)\cdot(\eta-c)} - c^{t-1}\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)}{(c-\gamma)\cdot(\eta-c)} + \eta^{t-1}\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)+\alpha\cdot(\eta-c)}{(\eta-\gamma)\cdot(\eta-c)} \\ 0 & c^{t-1} & -\frac{1}{\eta-c}\cdot\left(c^{t-1}-\eta^{t-1}\right) \\ 0 & 0 & \eta^{t-1} \end{bmatrix} \cdot$$

(1.11)

L'équation (1.11) permet d'exprimer les valeurs attendues pour B_t :

$$B_t = \left(B_1 + \frac{x_1}{c-\eta}\right)\cdot c^{t-1} - \frac{x_1}{c-\eta}\cdot\eta^{t-1} \qquad (1.12)$$

et pour w_t :

$$w_t = \gamma^{t-1}\cdot\left\{w_1 - B_1\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)}{c-\gamma} - x_1\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)-\alpha\cdot(c-\gamma)}{(c-\gamma)\cdot(c-\eta)}\right\} + c^{t-1}\cdot\left\{B_1\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)}{c-\gamma} + x_1\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)}{(c-\gamma)\cdot(c-\eta)}\right\} + \eta^{t-1}\cdot\left\{x_1\cdot\frac{\delta\cdot(c-1)+\alpha\cdot(\eta-c)}{(\gamma-\eta)\cdot(c-\eta)}\right\}$$

(1.13)

Définissons le ROE comme le ratio du résultat attendu divisé par les capitaux propres au bilan en début d'exercice et introduisons (1.1) :

$$ROE_t = \frac{E_t}{B_t} = r + \frac{w_t}{B_t} \qquad (1.14)$$

En introduisant (1.13), (1.12) dans (1.14), on obtient le résultat suivant :

$$ROE \to r + \frac{\delta \cdot (c-1)}{c-\gamma} \quad \text{quand } t \to \infty \tag{1.15}$$

Comme $0 < \frac{c-1}{c-\gamma} < 1$, l'écart entre le ROE limite et le coût des fonds propres est positif mais il n'est qu'une fraction du taux de création de richesse sur le long terme.

2. Estimation des multiples de résultat

En suivant GODE et OHLSON (2006), nous introduisons la variable de changement du résultat résiduel capitalisé z_t :

$$z_t = \frac{w_{t+1}}{r} - \frac{w_t}{r} \tag{2.1}$$

D'après GODE et OHLSON, la valeur de l'entreprise peut être écrite comme :

$$V_0 = \frac{E_1}{r} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{z_t}{(1+r)^t} \tag{2.2}$$

En introduisant (2.1) et (1.13) dans (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned} V = \frac{E_1}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{1-\gamma}{r+1-\gamma} \cdot \left\{ w_1 - B_1 \cdot \frac{\delta \cdot (c-1)}{c-\gamma} - x_1 \cdot \frac{\delta \cdot (c-1) - \alpha \cdot (c-\gamma)}{(c-\gamma) \cdot (c-\eta)} \right\} \\ + \frac{1}{r} \cdot \frac{c-1}{r+1-c} \cdot \left\{ B_1 \cdot \frac{\delta \cdot (c-1)}{c-\gamma} + x_1 \cdot \frac{\delta \cdot (c-1)}{(c-\gamma) \cdot (c-\eta)} \right\} \\ - \frac{1}{r} \cdot \frac{1-\eta}{r+1-\eta} \cdot \left\{ x_1 \cdot \frac{\delta \cdot (c-1) + \alpha \cdot (\eta - c)}{(\gamma - \eta) \cdot (c-\eta)} \right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'équation (2.3) peut se réécrire comme :

$$\begin{aligned} V = \frac{E_1}{r} - \frac{w_1}{r} \cdot \frac{1-\gamma}{r+1-\gamma} + B_1 \cdot \frac{\delta \cdot (c-1)}{(r+1-\gamma) \cdot (r+1-c)} \\ + \frac{1}{r} \cdot \frac{x_1}{c-\eta} \cdot \left\{ \alpha \cdot \left(\frac{1-\eta}{r+1-\eta} \cdot \frac{c-\eta}{\gamma-\eta} - \frac{1-\gamma}{r+1-\gamma} \right) + \frac{\delta \cdot (c-1)}{c-\gamma} \cdot \left(\frac{c-1}{r+1-c} + \frac{1-\gamma}{r+1-\gamma} - \frac{1-\eta}{r+1-\eta} \right) \right\} \end{aligned} \tag{2.4}$$