Une note sur les modèles AEG en temps continu

M LEVASSEUR

Février 2008

L'objectif de cette note est de tirer profit des avantages procurés par une modélisation en temps continu (possibilité d'exprimer des solutions analytiques pour des fonctions de valeur) pour

- proposer des modèles AEG indépendants de valeurs précises attribuées aux dividendes (les prévisions en matière de dividendes sont plus pauvres que celles en matière de bénéfices ; les dividendes ne sont qu'une portion des free-cash-flows ; les dividendes restent discrétionnaires)

- proposer des modèles AEG robustes dans le sens où les valeurs futures qu'ils prédisent pour des ratios financiers standards (PER, MBR, ROE) restent comprises dans des intervalles communément acceptables

- enrichir l'ensemble des choix possibles en matière de test empirique et en particulier d'estimation du coût du capital.

Les résultats proposés englobent les modèles couramment discutés dans la littérature, en premier lieu le modèle pionnier de Ohlson et Juettner-Nauroth (2000) mais aussi des extensions comme celle de Easton (2004).

1. Dérivation en temps continu des modèles AEG et RIV

Soit une fonction $Z(t)$ continue, dérivable et telle que $Z(t).e^{-r.t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

On peut écrire :

$$\int_0^{+\infty}\left[Z'(t).e^{-r.t} - r.Z(t).e^{-r.t}\right] dt = \left[Z(t).e^{-r.t}\right]_0^{+\infty} = -Z(0) \quad (1)$$

Définissons la valeur marchande d'une entreprise comme la somme actualisée des free cash-flows attendus :

$$P(0) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-r.t}\, dt \quad (2)$$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$P(0) = Z(0) + \int_0^{+\infty}\left[f(t) + Z'(t) - r.Z(t)\right].e^{-r.t}\, dt \quad (3)$$

Choisissons une fonction particulière $Z(t)$, telle que $r.Z(t) = x(t)$ où $x(t)$désigne le flux de bénéfices attendus. Alors (3) devient :

$$P(0) = \frac{x(0)}{r} + \frac{1}{r}.\int_0^{+\infty}\left[x'(t) - r.\{x(t) - f(t)\}\right].e^{-r.t}\ dt \quad (4)$$

Le modèle O J-N repose sur l'hypothèse particulière :

$$x'(t) - r.\{x(t) - f(t)\} = a_0.e^{\gamma_0.t} \text{ avec } \gamma_0 < r \quad (5)$$

Introduisons (5) dans (4), on obtient :

$$P(0) = \frac{x(0)}{r} + \frac{1}{r}\frac{a_0}{r-\gamma_0} \quad (6)$$

Supposons qu'il existe une fonction $B(t)$ continue, dérivable et telle que :

$$B'(t) = x(t) - f(t) \quad (7)$$

Alors (5) devient $x'(t) - r.B'(t) = a_0.e^{\gamma_0.t}$, ce qui permet d'écrire si $\gamma_0 \neq 0$:

$$x(t) = \gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0}.e^{\gamma_0.t} + r.B(t) \quad (8)$$

En notant que suivant (8) $x(0) = \gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0} + r.B(0)$, il est facile de réécrire (6) comme :

$$P(0) = B(0) + \frac{\gamma_1}{r} + \frac{a_0}{\gamma_0.(r-\gamma_0)} \quad (9)$$

On peut donner à l'équation (9 une interprétation immédiate. Si on suppose que la condition (7) décrit la relation de clean surplus, alors la fonction $B(t)$ représente la book value des fonds propres de l'entreprise. L'équation (9) n'est que l'expression sous la forme d'un modèle RIV d'un modèle équivalent de type AEG. On peut constater que les modèles AEG sont plus économiques en nombre de paramètres puisque le paramètre γ_1 n'est pas explicité. Il est contenu implicitement dans $x(0)$.

2. Problèmes liés à l'estimation des paramètres et cadres d'hypothèse

L'utilisation des modèles AEG pose en pratique le problème de l'estimation des paramètres γ_0 et a_0. Généralement, γ_0 est considéré égal au taux de croissance à long terme des résultats. Afin d'apprécier le caractère raisonnable de cette hypothèse, nous allons étudier le comportement asymptotique de 4 ratios financiers, particulièrement populaires :

- Le taux de croissance des résultats
- Le ROE (instantané)
- Le MBR
- Le PER

Notons la fonction $g(t)$ égale au taux de croissance instantanée des résultats :

$$g(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{\gamma_0 . a_0 . e^{\gamma_0 . t} + r . B'(t)}{\gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t} + r . B(t)} \quad (10)$$

Quand $t \to +\infty$, deux cas sont possibles :

Cas A $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t}} \to +\infty$, alors $g(t) \to \frac{B'(t)}{B(t)}$

Cas B $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t}} \to lim$, alors $g(t) \to \gamma_0$

Concernant le ROE, nous avons :

$$ROE(t) = \frac{x(t)}{B(t)} = \frac{\gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t} + r . B(t)}{B(t)} \quad (11)$$

Quand $t \to +\infty$, deux cas sont possibles :

Cas A $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t}} \to +\infty$, alors $ROE(t) \to r$

Cas B $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t}} \to lim$, alors $ROE(t) \to r + \frac{1}{lim} = ROE_\infty$

Concernant le MBR, nous avons :

$$MBR(t) = \frac{P(t)}{B(t)} = \frac{B(t) + \frac{\gamma_1}{r} + \frac{a_0 . e^{\gamma_0 . t}}{r - \gamma_0}}{B(t)} \quad (12)$$

Quand $t \to +\infty$, deux cas sont possibles :

Cas A $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t}} \to +\infty$, alors $MBR(t) \to 1$

Cas B $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t}} \to lim$, alors $MBR(t) \to r + \frac{1}{r - \gamma_0} \frac{1}{lim} = 1 + \frac{ROE_\infty - r}{r - \gamma_0}$

Concernant le PER, nous avons :

$$PER(t) = \frac{P(t)}{x(t)} = \frac{B(t) + \frac{\gamma_1}{r} + \frac{a_0 e^{\gamma_0 . t}}{r - \gamma_0}}{\gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0} . e^{\gamma_0 . t} + r . B(t)} \quad (13)$$

Quand $t \to +\infty$, deux cas sont possibles :

Cas A $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0}.e^{\gamma_0.t}} \to +\infty$, alors $PER(t) \to \frac{1}{r}$

Cas B $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0}.e^{\gamma_0.t}} \to lim$, alors $PER(t) \to \frac{1-\frac{\gamma_0}{ROE_\infty}}{r-\gamma_0}$

Le choix entre les deux hypothèses (A) ou (B) n'apparaît pas évident. Notons, que dans le cas (A), la comptabilité est asymptotiquement sans biais et que $g(t) \to \frac{B^{'}(t)}{B(t)} \to g$, le taux de croissance à long terme de l'économie et que par conséquent $\gamma_0 < g$. L'estimation du coefficient γ_0 reste donc une question empirique ouverte. Notons que ce coefficient peut prendre des valeurs négatives (comme au sein des modèles RIV). Dans ce cas le coefficient a_0 est très certainement négatif et γ_1 positif. Cette configuration correspond au cas d'une entreprise dont le goodwill évolue avec une borne supérieure. La capacité de l'entreprise à générer des opportunités à VAN positives est bornée.

Dans le cas (B), la comptabilité n'est pas sans biais puisque les valeurs de marché convergent vers des valeurs supérieures aux valeurs comptables (MBR>1). Il est raisonnable de poser comme le font O J-N que $\gamma_0 = g$ et le problème de l'estimation de ce coefficient s'en trouve simplifié. Notons cependant que pour que le modèle converge vers des valeurs acceptables pour ROE_∞ , ceci implique des restrictions sur la dynamique de $B(t)$. Si nous notons r_∞ une limite acceptable pour ROE_∞ , alors $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0}.e^{g.t}} \to \frac{1}{r_\infty - r}$.

Dans les deux cas, tant que la fonction $B(t)$ n'est pas identifiée, l'estimation des coefficients a_0 et γ_1 n'est pas possible à partir de la seule observation de $x(0)$, $g(0)$,.et $B(0)$. Afin de contourner la difficulté, on peut emprunter la voie utilisée par ailleurs par Ohlson[1] et Gao (2006), à savoir supposer que le pay-out ratio reste constant.

[1] La discussion pour déterminer quel est le cas le plus vraisemblable rejoint celle développée par Ohlson et Gao (2006) dans le cadre d'une politique de pay-out constant (k). Les auteurs privilégient le cas (B) en supposant que le taux de pay-out est suffisamment élevé pour éviter que la book value n'augmente à un rythme plus rapide que γ_0.

"The limit growth of x is governed by the dominant eigen value of the transition matrix $\begin{matrix} R - r.k & 1 \\ 0 & \gamma \end{matrix}$*. When k ≥ (R − γ)/r, it is easy to verify γ is the dominant eigen value. Thus, limt→∞xt+1/xt = γ.* " (p.60, Proposition 3.2)

In Foundations and Trends in Accounting, Vol. 1, No. 1 (2006) 1–70 DOI: 10.1561/1400000001
Earnings, Earnings Growth and Value, James Ohlson and Zhan Gao

3. Modèles AEG et pay-out ratio constant

Supposons que le pay-out ratio reste constant et égal à k. On peut écrire :

$$B'(t) = x(t) - f(t) = x(t).(1-k) \quad (14)$$

En introduisant (14) dans (8), on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{B'(t)}{1-k} = \gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0}.e^{\gamma_0.t} + r.B(t) \quad (15)$$

La solution[2] de (15) (voir annexe) est :

$$B(t) = \left[B(0) + \frac{\gamma_1}{r} - \frac{\frac{a_0}{\gamma_0}.(1-k)}{\gamma_0 - r.(1-k)}\right].e^{r.(1-k).t} - \frac{\gamma_1}{r} + \left[\frac{\frac{a_0}{\gamma_0}.(1-k)}{\gamma_0 - r.(1-k)}\right].e^{\gamma_0.t} \quad (16)$$

Ensuite, on peut introduire (16) dans (8) :

$$x(t) = \left[r.B(0) + \gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0}\right].e^{r.(1-k).t} + a_0.\left[\frac{e^{\gamma_0.t} - e^{r.(1-k).t}}{\gamma_0 - r.(1-k)}\right] \quad (17)$$

La dérivée de $x(t)$ s'écrit :

$$x'(t) = r.(1-k).\left[r.B(0) + \gamma_1 + \frac{a_0}{\gamma_0}\right].e^{r.(1-k).t} + a_0.\left[\frac{\gamma_0.e^{\gamma_0.t} - r.(1-k).e^{r.(1-k).t}}{\gamma_0 - r.(1-k)}\right] \quad (18)$$

(17) et (18) permettent d'écrire :

$$a_0 = [g(0) - r.(1-k)].x(0) \quad (19)$$

avec $g(0) = \frac{x'(0)}{x(0)}$

Enfin, en introduisant (19) dans (6) et en réarrangeant les termes, on obtient :

---

[2] La résolution de cette équation différentielle n'est pas nécessaire pour obtenir les résultats qui suivent. Il suffit de remarquer que $B'(0) = x(0).(1-k)$ puis d'utiliser les équations (8) et (10) en t=0. Cependant, l'explicitation de cette équation permet de mieux connaître la trajectoire supposée des bénéfices et d'ouvrir des possibilités d'estimation des paramètres à partir d'une séquence de bénéfices prévus.

$\frac{P(0)}{x(0)} = \frac{1}{r}.\left[1 + \frac{g(0)-r.(1-k)}{r-\gamma_0}\right]$ (20)

En supposant comme le font Ohlson et Gao, $r.(1-k) < \gamma_0$, on se retrouve dans les conditions du cas (B). Alors, on peut supposer $\gamma_0 = g$ et en reprenant la condition $\frac{B(t)}{\frac{a_0}{\gamma_0}.e^{g.t}} \to \frac{1}{r_\infty - r}$, on peut écrire :

$\frac{(1-k)}{g-r.(1-k)} = \frac{1}{r_\infty - r}$ ou encore $r.(1-k) = \frac{r.g}{r_\infty}$ (21)

En introduisant (21) dans (20), on obtient :

$\frac{P(0)}{x(0)} = \frac{1}{r}.\left[1 + \frac{g(0)-\frac{r.g}{r_\infty}}{r-g}\right]$ (22)

En abandonnant le cas (B) suivi par Ohlson et Gao et en emprunt le cas (A) à l'instar de Easton, on doit supposer : $r.(1-k) = g$ afin d'éviter de rendre le modèle explosif. Dans ce cas l'équation (20) s'écrit :

$\frac{P(0)}{x(0)} = \frac{1}{r}.\left[1 + \frac{g(0)-g}{r-\gamma_0}\right]$ (23)

Dans les deux cas, la description obtenue du PE ratio est économiquement facile à interpréter. Le PE est égal au PE de base multiplié par un facteur égal à 1 plus un terme fonction de l'écart entre le taux de croissance instantané actuel des bénéfices et un taux de croissance à long terme, éventuellement ajusté (équation 22).

Notons que le PEG ratio ${}^{\frac{P(0)}{x(0)}}\!\big/_{g(0)}$ a une interprétation simple dans les cas particuliers suivants :

Dans le cas (B), l'équation (22) permet d'écrire si $r_\infty = \frac{r.g}{r-g}$, $PEG = \frac{1}{r}.\frac{1}{r-g}$

Dans le cas (A), l'équation (23) permet d'écrire si $\gamma_0 = r - g$, $PEG = \frac{1}{r}.\frac{1}{g}$

4. Conclusion

L'utilisation à des fins empiriques des modèles AEG pose un problème de stratégie en matière de choix. Soit, on choisit le cadre (A) et il faut alors estimer les coefficients r, r_∞, $g(0)$ et g. Soit on choisit le cadre (B), et il faut alors estimer les coefficients r, γ_0, $g(0)$ et g.

Dans le premier cadre, r_∞ et g peuvent être choisis comme constants entre toutes les firmes. L'estimation de $g(0)$à partir des deux prévisions les plus proches de résultat permet alors d'estimer r à partir du PE.

$$r = \frac{\left[g+\frac{1}{PE}-\frac{1}{PE}\cdot\frac{g}{r_\infty}\right]+\sqrt{\left[g+\frac{1}{PE}-\frac{1}{PE}\cdot\frac{g}{r_\infty}\right]^2+4.\frac{g(0)-g}{PE}}}{2} \quad (24)$$

Dans le deuxième cadre, il est difficile de supposer γ_0 identique pour toutes les firmes. Il est donc nécessaire pour l'estimer de disposer de trois prévisions de résultat. En effet la dérivée seconde du bénéfice peut s'écrire :

$$x''(t) = [r.(1-k)]^2.\left[r.B(0)+\gamma_1+\frac{a_0}{\gamma_0}\right].e^{r.(1-k).t}+a_0.\left[\frac{{\gamma_0}^2.e^{\gamma_0.t}-[r.(1-k)]^2.e^{r.(1-k).t}}{\gamma_0-r.(1-k)}\right] \quad (25)$$

Dans ce cadre, il est facile de constater que :

$$x''(0) = g^2.x(0)+a_0.(\gamma_0+g) \quad (26)$$

En introduisant (19) dans (26), on obtient :

$$\gamma_0 = \frac{x'(0)}{x(0)}.\frac{\frac{x''(0)}{x'(0)}-g}{\frac{x'(0)}{x(0)}-g} \quad (27)$$

Il est possible d'exprimer le coût du capital[3] à partir de (23) :

$$r = \frac{\left[\gamma_0+\frac{1}{PE}\right]+\sqrt{\left[\gamma_0+\frac{1}{PE}\right]^2+4.\frac{r-\gamma_0+g(0)-g}{PE}}}{2} \quad (28)$$

[3] Pour une estimation empirique des paramètres, voir annexe 2

En revanche, il ne nous apparaît pas évident que l'estimation des free cash-flows à travers les seuls dividendes observés au cours d'une année soit suffisante pour garantir les conditions de convergence vers des valeurs raisonnables des principaux indicateurs financiers comme le ROE, le PER ou le MBR.

Annexe 1 :

L'équation (15) s'écrit :

$$r.B(t).(1-k) - B^{'}(t) + \gamma_1.(1-k) + \frac{a_0}{\gamma_0}.e^{\gamma_0.t}.(1-k) = 0 \quad (15')$$

Soit la transformée de Laplace de la fonction $B(t)$

$$L\{B(t)\} = f(s)$$

$$L\{B'(t)\} = s.f(s) - B(0)$$

(15') devient :

$$r.(1-k).f(s) - s.f(s) + B(0) + \frac{\gamma_1.(1-k)}{s} + \frac{\frac{a_0}{\gamma_0}.(1-k)}{s-\gamma_0} = 0$$

Ou encore

$$y = f(s) = \frac{B(0)}{s-r.(1-k)} + \frac{\gamma_1.(1-k)}{s.[s-r.(1-k)]} + \frac{\frac{a_0}{\gamma_0}.(1-k)}{[s-\gamma_0].[s-r.(1-k)]}$$

$$B(t) = L^{-1}(y) = B(0).e^{r.(1-k).t} + \gamma_1.(1-k).\frac{e^{r.(1-k).t}-1}{r.(1-k)} + \frac{a_0}{\gamma_0}.(1-k).\frac{e^{r.(1-k).t}-e^{\gamma_0.t}}{r.(1-k)-\gamma_0}$$

$$B(t) = \left[B(0) + \frac{\gamma_1}{r} - \frac{\frac{a_0}{\gamma_0}.(1-k)}{\gamma_0 - r.(1-k)}\right].e^{r.(1-k).t} - \frac{\gamma_1}{r} + \left[\frac{\frac{a_0}{\gamma_0}.(1-k)}{\gamma_0 - r.(1-k)}\right].e^{\gamma_0.t} \quad (16)$$

Annexe 2 :

L'équation (17) et la condition $r.(1-k)=g$ permettent d'écrire les résultats attendus *NI* en périodes 1, 2 et 3 :

$$NI(1)=\int_0^1 x(t).dt=\int_0^1[r.B(0)+\gamma_1].e^{g.t}dt+\int_0^1\frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{\gamma_0.e^{\gamma_0.t}-g.e^{g.t}}{\gamma_0-g}\right]dt \quad \text{(A2.1)}$$

$$NI(1)=[r.B(0)+\gamma_1].\frac{e^{g}-1}{g}+\frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{e^{\gamma_0}-e^{g}}{\gamma_0-g}\right] \quad \text{(A2.2)}$$

Si $e^{g}\cong 1+g$ et $e^{\gamma_0}\cong 1+\gamma_0$ alors :$NI(1)\cong[r.B(0)+\gamma_1]+\frac{a_0}{\gamma_0}$

On peut remplacer dans (28) $x(0)$ par $NI(1)+\varepsilon_1$ où ε_1 représente un terme d'erreur de mesure.

$$NI(2)=\int_1^2 x(t).dt=\int_1^2[r.B(0)+\gamma_1].e^{g.t}dt+\int_1^2\frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{\gamma_0.e^{\gamma_0.t}-g.e^{g.t}}{\gamma_0-g}\right]dt \quad \text{(A2.3)}$$

$$NI(2)=[r.B(0)+\gamma_1].\frac{e^{2.g}-e^{g}}{g}+\frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{e^{2.\gamma_0}-e^{\gamma_0}-e^{2.g}+e^{g}}{\gamma_0-g}\right] \quad \text{(A2.4)}$$

$$NI(2)=NI(1).e^{g}+\frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{e^{\gamma_0}-e^{g}}{\gamma_0-g}\right].[e^{\gamma_0}-1] \quad \text{(A2.5)}$$

Si $e^{g}\cong 1+g$ et $e^{\gamma_0}\cong 1+\gamma_0$ alors :$NI(2)\cong NI(1).(1+g)+a_0$

On peut remplacer dans (28) a_0 par $NI(2)-NI(1).(1+g)+\varepsilon_2$ où ε_2 représente un terme d'erreur de mesure.

$$NI(3)=\int_2^3 x(t).dt=\int_2^3[r.B(0)+\gamma_1].e^{g.t}dt+\int_2^3\frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{\gamma_0.e^{\gamma_0.t}-g.e^{g.t}}{\gamma_0-g}\right]dt \quad \text{(A2.6)}$$

$$NI(3)=[r.B(0)+\gamma_1].\frac{e^{3.g}-e^{2.g}}{g}+\frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{e^{3.\gamma_0}-e^{2.\gamma_0}-e^{3.g}+e^{2.g}}{\gamma_0-g}\right] \quad \text{(A2.7)}$$

$$NI(3) = NI(2).e^{g} + \frac{a_0}{\gamma_0}.\left[\frac{e^{\gamma_0} - e^{g}}{\gamma_0 - g}\right].[e^{\gamma_0} - 1].e^{\gamma_0} \quad \text{(A2.8)}$$

Si $e^{g} \cong 1 + g$ et $e^{\gamma_0} \cong 1 + \gamma_0$ alors :$NI(3) \cong NI(2).(1 + g) + a_0.(1 + \gamma_0)$

On peut estimer γ_0 en utilisant $NI(3) - NI(2).(1 + g) - \varepsilon_3$ où ε_3 représente un terme d'erreur de mesure et l'estimation précédente de a_0.

L'expression (A2.9) correspond à l'équation (27) :

$$\gamma_0 = \frac{NI(2)-NI(1)}{NI(1)}.\frac{\frac{[NI(3)-NI(2)]-[NI(2)-NI(1)]}{NI(2)-NI(1)}-g-\frac{\varepsilon_2.NI(1)}{NI(2)-NI(1)}-\frac{\varepsilon_3.NI(1)}{NI(2)-NI(1)}}{\frac{NI(2)-NI(1)}{NI(1)}-g+\frac{\varepsilon_2}{NI(1)}} \quad \text{(A2.9)}$$