Modélisation de la défaillance et coût du capital

Michel LEVASSEUR

Novembre 2006

Les notations utilisées sont les suivantes :

p	La probabilité de défaillance dans un espace de n années
π	La probabilité annuelle de survie
π_N	La probabilité risque neutre de survie
i	Le taux d'intérêt de la dette
r	Le coût de la dette avant impôts
r'	Le coût de la dette après impôts
r_a	Le coût de la dette perçu par les actionnaires
α	Le pourcentage de créance perdue du fait de la défaillance
D	La dette en valeur de marché
D_a	La valeur présente des avantages et coûts liés à la fiscalité et à la défaillance, imputables à une dette initiale *D*
E	Les fonds propres en valeur de marché
$B_{U,t}$	La valeur comptable (aux livres) en t des fonds propres pour une société non endettée
$B_{D,t}$	La valeur comptable (aux livres) en t des fonds propres pour une société endettée initialement d'un montant *D*.
r_f	Le taux sans risque après impôts
$r_{e,f}$	Le taux sans risque pour les actionnaires avant impôts personnels
$r_{d,f}$	Le taux sans risque sur le marché de la dette avant impôts personnels
k	Le coût des fonds propres
$Wacc$	Le coût moyen pondéré du capital
k_u	Le coût du capital sans levier
V_U	La valeur de l'entreprise avec un levier nul
X	L'EBIT attendu en cas de non défaillance
X_D^c	La valeur de l'équivalent certain de l'EBIT conditionnellement à la survie et au fait que la dette s'élève à D
$E\left[\tilde{X}_D\right]$	La valeur espérée de l'EBIT conditionnellement à la survie et au fait que la dette s'élève à D
g	Le taux de croissance attendu pour l'EBIT
g^c	La valeur de l'équivalent certain du taux de croissance attendu pour l'EBIT conditionnellement à la survie
$E\left[\tilde{g}\right]$	La valeur espérée du taux de croissance attendu pour l'EBIT conditionnellement à la survie
τ	Le taux d'imposition des sociétés
τ_e	Le taux d'imposition des revenus d'actions
τ_d	Le taux d'imposition des revenus de dettes

1. Introduction

L'objet de cette note est de proposer une méthode de calcul relativement simple du coût du capital en tenant compte des effets de la fiscalité et de ceux des coûts de défaillance.

Le point de départ est fourni par DAMODARAN. Il s'agit d'estimer à partir d'un ratio financier lié à l'endettement la note que pourrait obtenir en fonction du levier financier choisi. Cette simulation permet de prendre en compte les spreads de taux, le risque de défaillance et les coûts associés. L'univers économique retenu est un monde à la « MODIGLIANI MILLER », aussi bien en matière de valorisation que de dispositif fiscal. Par ailleurs, pour tenir compte dans la valorisation du phénomène de la défaillance, nous avons recours à la notion de probabilité risque neutre. L'évaluation du risque de défaillance est donc entièrement donnée par les spreads de taux observés sur le marché des dettes.

L'analyse distingue bien l'intérêt promis et la rentabilité espérée pour les apporteurs de capitaux prêtés. Elle exige pour bien 3 types d'information : la gamme des taux d'intérêt pratiqués sur le marché de la dette en fonction des notations, les probabilités estimées de défaillance (survie) pour chaque classe de note et une mesure du coût de la défaillance.

Le plan de la note est le suivant. Suite à cette introduction, une deuxième section expose le modèle d'évaluation retenu et l'applique à la valorisation de fonds propres respectant le principe de la responsabilité limitée. Une troisième section développe dans ce cadre l'évaluation d'une dette risquée. Une quatrième détaille le cas de l'évaluation d'une entreprise sans dette mais qui interrompt (sans coût) son activité lorsque sa valeur totale est égale à une limite D. Une cinquième fournit une estimation des effets de la dette sur la valeur de l'entreprise du fait de la fiscalité et des coûts de défaillance. Les sixième, septième et huitième proposent respectivement une mesure des coûts des fonds propres, de la dette et de l'ensemble des ressources (Coût moyen pondéré du capital).

2. La valeur des fonds propres

Notons en premier que la probabilité de survie se calcule à partir de la probabilité de défaillance selon la relation :

$$\pi = (1-p)^{\frac{1}{n}}$$

Posons la valeur des fonds propres égale à la valeur actualisée des flux nets d'impôts, espérés dans l'univers risque neutre au taux sans risque :

$$E_0 = \frac{\pi_N \cdot \left[\left(X_D^c - i \cdot D_0 \right) \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{D,0} \right] \cdot (1-\tau_e) - \pi_N \cdot (E_1 - E_0) \cdot \tau_e + \pi_N \cdot E_1 + (1-\pi_N) \cdot E_0 \cdot \tau_e}{(1+r_f)}$$

$$E_0 \cdot (1 + r_f - \tau_e) = \pi_N \cdot \left[\left(X_D^c - i \cdot D_0 \right) \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{D,0} \right] \cdot (1-\tau_e) + \pi_N \cdot E_1 \cdot (1-\tau_e)$$

$$E_0 = \frac{\pi_N \cdot \left[\left(X_D^c - i \cdot D_0 \right) \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{D,0} \right] + \pi_N \cdot E_1}{\left(1 + \frac{r_f}{(1-\tau_e)} \right)}$$

$\Rightarrow$

$$E_0 = \pi_N \cdot \left[\left(X_D^c - i \cdot D_0 \right) \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{D,0} \right] \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{(1+g^c)^{t-1} \cdot \pi_N^{\;t-1}}{\left(1 + \frac{r_f}{(1-\tau_e)} \right)^t}$$

$$E_0 = \frac{\pi_N \cdot \left[\left(X_D^c - i \cdot D_0 \right) \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{D,0} \right]}{1 + \frac{r_f}{(1-\tau_e)} - \pi_N \cdot (1+g^c)}$$

Notons le coût sans risque des fonds propres avant impôts personnels $r_{e,f} = \frac{r_f}{(1-\tau_e)}$

$$\boxed{E_0 = \frac{\pi_N \cdot \left(X_D^c - i \cdot D \right) \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{D,0}}{r_{e,f} + 1 - \pi_N \cdot (1+g^c)} \qquad (1.1)}$$

3. La valeur de la dette

En définissant la valeur de la dette comme la valeur présente des flux espérés nets d'impôts dans un univers risque neutre, on obtient :

$$D = \frac{\pi_N \cdot i \cdot D \cdot (1-\tau_d)}{(1+r_f)} + \frac{(1-\pi_N)\cdot(1-\alpha\cdot(1-\tau_d))\cdot D}{(1+r_f)} + \frac{\pi_N^{\,2} \cdot i \cdot D \cdot (1-\tau_d)}{(1+r_f)^2} + \frac{\pi_N \cdot (1-\pi_N)\cdot(1-\alpha\cdot(1-\tau_d))\cdot D}{(1+r_f)^2} + \ldots$$

$$\Rightarrow$$

$$D = \pi_N \cdot i \cdot D \cdot (1-\tau_d) \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\pi_N^{\,t-1}}{(1+r_f)^t} + (1-\pi_N)\cdot(1-\alpha\cdot(1-\tau_d))\cdot D \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\pi_N^{\,t-1}}{(1+r_f)^t}$$

$$D = \pi_N \cdot i \cdot D \cdot (1-\tau_d) \cdot \frac{1}{1+r_f-\pi_N} + (1-\pi_N)\cdot(1-\alpha\cdot(1-\tau_d))\cdot D \cdot \frac{1}{1+r_f-\pi_N}$$

$$D = \frac{\pi_N \cdot i \cdot D - (1-\pi_N)\cdot\alpha\cdot D}{\dfrac{r_f}{(1-\tau_d)}}$$

Notons le coût sans risque des dettes avant impôts personnels $r_{d,f} = \dfrac{r_f}{(1-\tau_d)}$

$$\boxed{D = \frac{\pi_N iD - (1-\pi_N)\alpha D}{r_{d,f}} \qquad (1.2)}$$

On peut en déduire sans difficulté la probabilité risque neutre de survie :

$$r_{d,f} = \pi_N \cdot i - (1-\pi_N)\cdot\alpha$$
$$\Rightarrow$$

En pratique, il est facile d'estimer la probabilité risque neutre implicite à partir du taux sans risque sur le marché de la dette, du spread de taux pour la dette risquée et du coût de la défaillance :

$$\pi_N = \frac{r_{d,f}+\alpha}{i+\alpha} \qquad (1.3)$$

4. La valeur de la firme non endettée

Dans un monde risque neutre, l'actualisation s'effectue au taux sans risque, alors :

$$V_{U,0} = \frac{\pi_N \cdot \left[X_D^c \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{U,0}\right] \cdot (1-\tau_e) - \pi_N \cdot \left(V_{U,1} - V_{U,0}\right) \cdot \tau_e + \pi_N \cdot V_{U,1} + (1-\pi_N) \cdot V_{U,0} \cdot \tau_e}{\left(1+r_f\right)}$$

$$V_{U,0} \cdot \left(1 + r_f - \tau_e\right) = \pi_N \cdot \left[X_D^c \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{U,0}\right] \cdot (1-\tau_e) + \pi_N \cdot V_{U,1} \cdot (1-\tau_e)$$

$$V_{U,0} = \frac{\pi_N \cdot \left[X_D^c \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{U,0}\right] + \pi_N \cdot V_{U,1}}{\left(1 + \frac{r_f}{(1-\tau_e)}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$V_{U,0} = \pi_N \cdot \left[X_D^c \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{U,0}\right] \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\left(1+g^c\right)^{t-1} \cdot \pi_N{}^{t-1}}{\left(1 + \frac{r_f}{(1-\tau_e)}\right)^t}$$

$$V_{U,0} = \frac{\pi_N \cdot \left[X_D^c \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{U,0}\right]}{1 + \frac{r_f}{(1-\tau_e)} - \pi_N \cdot \left(1+g^c\right)}$$

$$\boxed{V_{U,0} = \frac{\pi_N \cdot X_D^c \cdot (1-\tau) - g^c \cdot B_{U,0}}{r_{e,f} + 1 - \pi_N \cdot \left(1+g^c\right)} \qquad (1.4)}$$

5. La variation de valeur pour les actionnaires, induite par la dette et conséquente à la fiscalité et aux coûts de défaillance

Elle s'obtient à travers la mesure actualisée des flux gagnés (perdus) par les actionnaires du fait de la présence de la dette :

$$D_a = D_0 \cdot \left[r_{e,f} - \pi_N i (1-\tau)\right] \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\pi_N^{t-1} \cdot \left(1+g^c\right)^{t-1}}{\left(1+r_{e,f}\right)^t}$$

L'effet de la dette sur la valeur totale de l'entreprise est égal à :

$$D_a = D_0 \cdot \frac{\left[r_{e,f} - \pi_N i (1-\tau)\right]}{r_{e,f} + 1 - \pi_N \cdot \left(1+g^c\right)} \qquad (1.5)$$

Posons $T = \dfrac{\left[r_{e,f} - \pi_N i\left(1-\tau\right)\right]}{r_{e,f} + 1 - \pi_N \cdot \left(1+g^c\right)}$

En introduisant (1.3), on obtient :

$$\boxed{T = \frac{r_{e,f} - r_{d,f}\left(1-\tau\right) - \alpha\left(1-\tau\right)\left(1-\pi_N\right)}{r_{e,f} + 1 - \pi_N \cdot \left(1+g^c\right)} \qquad (1.6)}$$

Il est facile de vérifier que si le risque de défaillance est nul (π_N =1), la croissance est nulle et que les 2 taux sans risque avant impôts personnels sont égaux, alors T=τ.

Par ailleurs, en suivant Miles et Ezzel, si on suppose le ratio de levier financier D/E constant, alors le taux de croissance de la dette est celui des fonds propres et donc celui de la valeur sans levier de la firme, il en découle que le risque associé à l'effet sur la valeur du fait de la dette est du même ordre que celui associé à l'évolution de la valeur sans levier de la firme :

$$k_U - r_f = \pi \cdot \left(1 + E\left[\tilde{g}\right]\right) - \pi_N \cdot \left(1+g^c\right)$$

Dans ce cas, l'équation (1.6) se réécrit :

$$T = \frac{r_{e,f} - r_{d,f}\left(1-\tau\right) - \alpha\left(1-\tau\right)\left(1-\pi_N\right)}{k_U + 1 - \pi - \pi \cdot E\left[\tilde{g}\right]} \quad (1.6')$$

Enfin, on peut écrire :

$$E + D = V_U + D \cdot T \qquad (1.7)$$

6. Le coût des fonds propres

Posons la valeur des fonds propres égale à la valeur actualisée des flux espérés au taux de rentabilité exigé par les actionnaires avant impôts personnels et supposons que les taux de croissance attendus sont indépendamment, inter temporellement, identiquement distribués :

$$E_{D,0} = \frac{\pi \cdot \left[\left(E\left[\tilde{X}_D\right] - i \cdot D_0\right) \cdot \left(1-\tau\right) - E\left[\tilde{g}\right] \cdot B_{D,0}\right]}{\left(1+k_D\right)} + \frac{\pi^2 \cdot \left[\left(E\left[\tilde{X}_D\right] - i \cdot D_0\right) \cdot \left(1-\tau\right) - E\left[\tilde{g}\right] \cdot B_{D,0}\right] \cdot \left(1 + E\left[\tilde{g}\right]\right)}{\left(1+k_D\right)^2} + \ldots$$

$\Rightarrow$

$$E_{D,0}=\left[\left(E\left[\tilde{X}_D\right]-i\cdot D_0\right)\cdot(1-\tau)-E\left[\tilde{g}\right]\cdot B_{D,0}\right]\cdot\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\pi^{t-1}\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)^{t-1}}{\left(1+k_D\right)^t}$$

$$E_{D,0}=\frac{\pi\cdot\left[\left(E\left[\tilde{X}_D\right]-i\cdot D_0\right)\cdot(1-\tau)-E\left[\tilde{g}\right]\cdot B_{D,0}\right]}{1+k_D-\pi\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)}$$

Il en découle :

$$1+k_D-\pi\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)=\frac{\pi\cdot\left[\left(E\left[\tilde{X}_D\right]-i\cdot D_0\right)\cdot(1-\tau)-E\left[\tilde{g}\right]\cdot B_{D,0}\right]}{E_{D,0}}$$

$$1+k_D-\pi\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)=\frac{\left[\pi\cdot\left\{E\left[\tilde{X}_D\right]\cdot(1-\tau)-E\left[\tilde{g}\right]\cdot\left(B_{D,0}+D_0\right)\right\}+(1-\pi)\cdot D_0\right]}{E_{D,0}}$$
$$-\frac{D_0\cdot\left[(1-\pi)+\pi\cdot i\cdot(1-\tau)-\pi\cdot E\left[\tilde{g}\right]\right]}{E_{D,0}}$$

En suivant la même approche, on peut montrer que :

$$V_{U,0}=\frac{\pi\cdot\left[E\left[\tilde{X}_D\right]\cdot(1-\tau)-E\left[\tilde{g}\right]\cdot B_{U,0}\right]+(1-\pi)\cdot D_0}{1+k_u-\pi\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)}$$

En tenant compte de (1.7), il vient :

$$1+k_D-\pi\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)=\frac{\left(1+k_u-\pi\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)\right)\cdot\left(E_{D,0}+D_0\cdot[1-T]\right)}{E_{D,0}}-\frac{D_0\cdot\left[(1-\pi)+\pi\cdot i\cdot(1-\tau)-\pi.E\left[\tilde{g}\right]\right]}{E_{D,0}}$$

$\Rightarrow$

$$k_D=k_u+\frac{\left\{\left[k_u+1-\pi\cdot\left(1+E\left[\tilde{g}\right]\right)\right]\cdot(1-T)-\left[\pi\cdot i\cdot(1-\tau)+1-\pi-\pi.E\left[\tilde{g}\right]\right]\right\}\cdot D_0}{E_{D,0}}$$

$$k_D=k_u+\left[k_u-r_{e,f}-\left[\pi-\pi_N\right]\cdot i\cdot(1-\tau)\right]\cdot\frac{D_0}{E_{D,0}}$$

Le coût des fonds propres peut s'exprimer en fonction du levier financier :

$$\boxed{k_D=k_u+\left[k_u-r_{e,f}-\left[\pi-\pi_N\right]\cdot i\cdot(1-\tau)\right]\cdot\frac{D_0}{E_{D,0}}\qquad(1.8)}$$

7. Le coût de la dette

Du point de vue des prêteurs le rendement de la dette avant impôts personnels r est défini par l'équation suivante :

$$D = \frac{\pi \cdot i \cdot D}{(1+r)} + \frac{(1-\pi)\cdot(1-\alpha)\cdot D}{(1+r)} + \frac{\pi^2 \cdot i \cdot D}{(1+r)^2} + \frac{\pi \cdot (1-\pi)\cdot(1-\alpha)\cdot D}{(1+r)^2} + ...$$

$\Rightarrow$

$$D = \pi \cdot i \cdot D \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\pi^{t-1}}{(1+r)^t} + (1-\pi)\cdot(1-\alpha)\cdot D \cdot \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\pi^{t-1}}{(1+r)^t}$$

$$D = \pi \cdot i \cdot D \cdot \frac{1}{1+r-\pi} + (1-\pi)\cdot(1-\alpha)\cdot D \cdot \frac{1}{1+r-\pi}$$

ou encore :

$$D = \frac{\pi \cdot i \cdot D - (1-\pi)\cdot \alpha \cdot D}{r} \qquad (1.9)$$

Il en découle : $r = \pi \cdot i - (1-\pi)\cdot \alpha = \pi \cdot (i+\alpha) - \alpha$

Par ailleurs, l'équation (1.3) permet d'écrire : $r_{d,f} = \pi_N \cdot i - (1-\pi_N)\cdot \alpha = \pi_N \cdot (i+\alpha) - \alpha$

Il apparaît que la prime de risque exigée par les prêteurs, vu l'étendue du risque ($i+\alpha$) et leur aversion au risque (π-π_N) est donnée par l'équation :

$$r - r_{d,f} = (\pi - \pi_N)\cdot(i+\alpha) \qquad (1.10)$$

Le coût après impôts de la dette est :

$$r' = r \cdot (1-\tau) = \left[r_{d,f} + (\pi - \pi_N)\cdot(i+\alpha)\right]\cdot(1-\tau) \qquad (1.11)$$

8. Le coût moyen pondéré du capital

Il peut être calculé ainsi :

$$Wacc = k\frac{E}{E+D} + r'\frac{D}{E+D}$$

En introduisant (1.8) et (1.11) dans l'expression, on obtient :

$$Wacc = \frac{k_u \cdot E_{D,0} + k_u \cdot D_0 - \left[r_{e,f} + \left[\pi - \pi_N \right] \cdot i \cdot (1-\tau) \right] \cdot D_0 + \left[r_{d,f} + (\pi - \pi_N) \cdot (i + \alpha) \right] \cdot (1-\tau) \cdot D_0}{E_{D,0} + D_0}$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{Wacc = k_u - \left[r_{e,f} - r_{d,f} \cdot (1-\tau) - \alpha \cdot (\pi - \pi_N) \right] \cdot \frac{D_0}{E_{D,0} + D_0} \qquad (1.12)}$$

L'utilisation pratique de ce modèle exige comme dans un monde où la défaillance est ignorée la connaissance du taux sans risque avant impôts personnels sur le marché de la dette ($r_{d,f}$). L'observation du taux d'intérêt pratiqué vu le risque de l'émetteur i et une estimation du montant (α) du capital perdu en cas de défaillance suffisent pour calculer les paramètres π_N et *T*. Il reste à intégrer une estimation de la probabilité de survie π.