Evaluation et coût du capital d'une start-up

Michel LEVASSEUR
Publié dans la Revue du Financier, 2005.

L'évaluation d'une start-up pose une série de problèmes spécifiques. Elle repose plus sur une promesse d'activités que sur un ensemble d'actifs opérationnels. Les risques, et tout particulièrement d'échec définitif, sont élevés. Aussi, les exigences des apporteurs de fonds sont-elles particulièrement élevées. Les taux de rentabilité requis sont sans commune mesure avec ceux habituellement observés sur les marchés financiers. L'objectif de ce papier est de proposer quelques outils afin de guider l'analyste dans le choix des facteurs fondamentaux propres à un modèle d'évaluation adapté à ce genre de situation et à mieux comprendre les déterminants du coût du capital.

La modélisation proposée s'inscrit dans le champ des options réelles. Les techniques utilisées se retrouvent dans de nombreuses contributions (Brennan, M. et Trigeorgis, L., 1999, Dixit & Pindyck, 1996, Trigeorgis, L., 1996 pour n'en citer que quelques-unes). A l'instar de modèles « traditionnels » d'évaluation comme celui de Bates, nous proposons un modèle à deux périodes. La première est celle du développement initial. Les apporteurs de fonds passent un contrat initial suivant lequel ils s'engagent à financer de manière irrévocable l'activité de développement de l'entreprise pendant un nombre d'années limité. Cette période est caractérisée par une consommation de fonds régulière (« cash burning ») et une absence d'activité notable de production ou de commercialisation. Pour simplifier, nous supposerons que la firme est suffisamment dotée en capital pour faire face à ses besoins financiers initiaux. Le risque de défaillance est donc nul à cette époque. La décision de développement est par ailleurs irrévocable.

Au terme de cette première période, les associés sont confrontés au choix suivant. Ils peuvent, soit décider de la mise en œuvre du projet industriel, investir et commencer l'activité productrice, soit attendre et prolonger la période de développement, soit enfin abandonner et liquider l'entreprise. Ils disposent à cette date d'une bonne évaluation du chiffre d'affaires attendu, des marges possibles et des perspectives de croissance. Cependant, il subsiste une incertitude sur le niveau de valeur créée par unité monétaire investie. Cette incertitude résiduelle peut être suffisante dans certaines situations pour justifier une stratégie de report de l'investissement et d'attente. L'évaluation de l'entreprise au début de la deuxième période empruntera le chemin d'une évaluation sous forme d'option réelle sans échéance. Un des intérêts du choix de cette technique est de pouvoir rendre compte, d'une part qu'au moment où les fonds seront levés pour financer l'investissement, la valeur de l'entreprise excédera largement la valeur du capital investi, ce qui est généralement le cas, d'autre part que cette entreprise reste confrontée à un risque de défaillance encore non négligeable.

Ce papier est divisé en 5 sections. La première présente les variables utilisées et les principales hypothèses. La seconde propose une modélisation de la valeur finale de l'entreprise au terme de la première période. La troisième développe un modèle d'évaluation courant tout au long de la période initiale de contractualisation, intégrant le modèle précédent pour la valeur finale et tenant compte de l'aspect optionnel du contrat. La quatrième fournit une estimation du taux de rendement attendu par les actionnaires au cours de la période contractuelle. La cinquième est consacrée à une étude comparative de l'importance des différents paramètres sur la détermination de la valeur initiale de l'entreprise et sur son coût du capital.

1. Hypothèses et cadre de la modélisation

Supposons que l'entreprise soit financée uniquement par des fonds propres. Elle ne détient pas d'actifs en place et le coût de son fonctionnement pour chaque année est évalué sous la forme d'un flux égal à c. Sa valeur initiale pour ses actionnaires est désignée par S_0.

Les actionnaires ont conclu un pacte initial. L'entreprise pourra consommer chaque année jusqu'en T un montant c pour poursuivre le développement d'un produit. Afin de faire face à ses besoins, elle a été dotée d'une trésorerie initiale égale à $c \cdot \left[\frac{1-e^{-rT}}{r}\right]$ où r désigne le taux sans risque. Le contrat est irrévocable.

Au terme de ces T années, la valeur de l'entreprise est égale à S_T. A ce terme, les dirigeants de l'entreprise peuvent décider de la réalisation immédiate ou différée d'un investissement irréversible I. L'activité qui en résultera permettra de dégager un cash-flow égal à π. Pour financer cet investissement, l'entreprise devra lever des fonds sur le marché financier. On supposera que la valeur $V(\pi)$ attribuée à l'entreprise après investissement est égale à $\frac{\pi}{\delta}$ où δ représente le taux de capitalisation en usage dans le secteur, vu le risque et les perspectives de croissance.

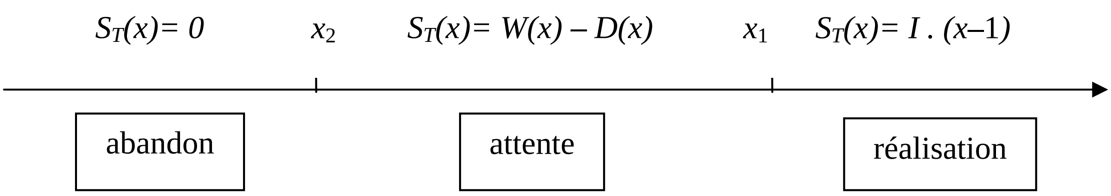
Les dirigeants n'ont pas l'obligation de réaliser immédiatement en T cet investissement. Ils peuvent bien évidemment abandonner le projet et S_T. vaut zéro. Cette décision est irrémédiable. Ils peuvent aussi décider d'attendre. Il leur en coûtera de devoir continuer à financer les dépenses courantes d'exploitation C sans bénéficier de recettes mais ils auront l'avantage de prendre éventuellement une décision d'investissement mieux avisée, leur connaissance du cash-flow futur et de son taux de capitalisation pouvant évoluer. Posons $x = \frac{V(\pi)}{I}$. Par la suite, x sera modélisé sous la forme d'un processus stochastique pour rendre compte de cette incertitude spécifique. Nous supposerons qu'il existe une valeur x_1 de x telle que si x est supérieur à x_1, les dirigeants de l'entreprise décident de réaliser immédiatement l'investissement. Dans ce cas, $S_T(x) = I \cdot (x-1)$.

Si x est inférieur à x_1, l'entreprise devra couvrir des dépenses d'exploitation c jusqu'au moment où x sera égal à x_1 et où le projet d'industrialisation sera entrepris. Notons par $D(x)$ la valeur espérée et actualisée en T de tous ces décaissements à venir qui sont, quant à leur nombre, incertains (la date d'arrêt n'est pas connue au départ). Cette fonction vérifie la condition $D(x_1) = 0$. Par ailleurs, elle continuera à détenir une option sur la réalisation du projet au cas où x deviendrait égal à x_1. Notons $W(x)$ la valeur de cette option réelle, sachant que $W(x_1) = I \, . \, (x_1 - 1)$. Pour finir, nous pouvons noter que $S_T(x) = W(x) – D(x)$.

Il reste à prendre en compte la responsabilité limitée des actionnaires. La variable $S_T(x)$ doit rester positive. Il existe donc une deuxième valeur x_2, telle que si x est inférieur à x_2, il est optimal pour les actionnaires de liquider immédiatement l'entreprise.

Figure 1

Valeur de l'entreprise en *T* :



Nous supposerons dans ce qui suit que x suit un mouvement brownien géométrique et que sa valeur espérée et actualisée en T pour des dates futures est déclinante suivant un taux d'attrition α. L'attente n'apporte aucun avantage spécifique. Bien au contraire, l'effet de la concurrence ne peut que porter préjudice. Dès lors, on peut écrire :

$$dx = (r - \alpha) \cdot x \cdot dt + \sigma_2 \cdot dz \qquad (1)$$

Le paramètre σ_2 mesure l'incertitude qui pèse sur les prévisions effectuées en T et qui porte sur les périodes au-delà.

Il reste à caractériser la dynamique du processus x entre maintenant et la date de fin de contrat T. On suppose qu'il suit un mouvement brownien géométrique mais de paramètre différent :

$$dx = \mu_1 \cdot x \cdot dt + \sigma_1 \cdot dz \qquad (2)$$

Le paramètre σ_1 mesure l'incertitude qui pèse sur les prévisions effectuées entre maintenant et T et μ_1 peut excéder r en fonction des progrès technologiques espérés.

2. Modélisation de la valeur au terme de la période contractuelle de développement

Le lemme d'Itô établit que :

$$dW = \left[\frac{\partial W}{\partial t} + (r-\alpha)\cdot x\cdot\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{2}\cdot\sigma_2^2\cdot x^2\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]\cdot dt + \sigma_2\cdot x\cdot\frac{\partial W}{\partial x}\cdot dz \tag{3}$$

et

$$dD = \left[\frac{\partial D}{\partial t} + (r-\alpha)\cdot x\cdot\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{1}{2}\cdot\sigma_2^2\cdot x^2\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right]\cdot dt + \sigma_2\cdot x\cdot\frac{\partial D}{\partial x}\cdot dz \tag{4}$$

Comme *W* et *D* sont homogènes dans le temps (r, α, σ_2 constants et pas d'échéance), nous avons :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t} = 0$$

En probabilité risque neutre, on peut écrire :

$$E[dW] = W\cdot r\cdot dt$$
$$E[dD] - c\cdot dt = D\cdot r\cdot dt$$

d'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\cdot\sigma_2^2\cdot x^2\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (r-\alpha)\cdot x\cdot\frac{\partial W}{\partial x} - r\cdot W = 0\\
&\frac{1}{2}\cdot\sigma_2^2\cdot x^2\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + (r-\alpha)\cdot x\cdot\frac{\partial D}{\partial x} - r\cdot D - c = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Les solutions générales de ces deux équations aux dérivées partielles sont de la forme :

$$W(x) = A_1\cdot x^{\beta_1} + A_2\cdot x^{\beta_2}$$

$$D(x) = \frac{c}{r} - A_3\cdot x^{\beta_1'} + A_4\cdot x^{\beta_2'}$$

En reprenant ces formes, les deux E.D.P. s'écrivent alors :

$$A_1 \cdot x^{\beta_1} \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2 \cdot \beta_1 \cdot (\beta_1 - 1) + (r - \alpha) \cdot \beta_1 - r\right] + A_2 \cdot x^{\beta_2} \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2 \cdot \beta_2 \cdot (\beta_2 - 1) + (r - \alpha) \cdot \beta_2 - r\right] = 0$$

$$A_3 \cdot x^{\beta_1} \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2 \cdot \beta_1^{'} \cdot (\beta_1^{'} - 1) + (r - \alpha) \cdot \beta_1^{'} - r\right] + A_4 \cdot x^{\beta_2} \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2 \cdot \beta_2^{'} \cdot (\beta_2^{'} - 1) + (r - \alpha) \cdot \beta_2^{'} - r\right] = 0$$

Les coefficients β sont les racines de l'équation du second degré :

$$\tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2 \cdot \beta \cdot (\beta - 1) + (r - \alpha) \cdot \beta - r = 0 \qquad (6)$$

Posons : $\Delta = \left[(r - \alpha) - \tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2\right]^2 + 2 \cdot \sigma_2^2 \cdot r$.

Les solutions sont :

$$\beta_1 = \beta_1^{'} = \frac{-\left[(r - \alpha) - \tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2\right] + \sqrt{\Delta}}{\sigma_2^2}$$

$$\beta_2 = \beta_2^{'} = \frac{-\left[(r - \alpha) - \tfrac{1}{2} \cdot \sigma_2^2\right] - \sqrt{\Delta}}{\sigma_2^2} \qquad (7)$$

Les conditions aux bornes sont :

$$W(x_1) = I \cdot (x_1 - 1)$$
$$D(x_1) = 0 \qquad \text{(Trigger points conditions)}$$
$$W(x_2) = D(x_2)$$

et

$$\frac{\partial W(x_1)}{\partial x} = I$$
$$\frac{\partial D(x_1)}{\partial x} = 0 \qquad \text{(Smooth pasting conditions)}$$
$$\frac{\partial W(x_2)}{\partial x} = \frac{\partial D(x_2)}{\partial x}$$

Les conditions contenant le terme x_1 (1, 2, 4 et 5) permettent d'exprimer les valeurs des 4 constantes :

$$A_1 = x_1^{-\beta_1}\left[I\cdot\left(x_1\cdot\frac{1-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}-\frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\right)\right]$$
$$A_2 = x_1^{-\beta_2}\left[I\cdot\left(x_1\cdot\frac{\beta_1-1}{\beta_1-\beta_2}-\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\right)\right]$$
$$A_3 = x_1^{-\beta_1}\left[\frac{c}{r}\cdot\left(\frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\right)\right]$$
$$A_4 = x_1^{-\beta_2}\left[\frac{c}{r}\cdot\left(\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\right)\right]$$

On peut ainsi exprimer la valeur de l'option réelle liée au projet :

$$W(x)=\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_1}\cdot\left[I\cdot\left(x_1\cdot\frac{1-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}-\frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\right)\right]+\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_2}\cdot\left[I\cdot\left(x_1\cdot\frac{\beta_1-1}{\beta_1-\beta_2}-\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\right)\right] \quad (8)$$

La valeur des décaissements qu'il faudrait maintenir au cas où l'attente serait décidée :

$$D(x)=\frac{c}{r}\cdot\left[1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_1}\cdot\frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}-\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\right] \quad (9)$$

Ce montant peut être considéré comme une évaluation de la ronde de financement qu'il faudrait organiser entre la première ronde de lancement de l'entreprise et la dernière correspondant à l'industrialisation.

La 6° condition aux bornes permet d'écrire :

$$\frac{x_2}{x_1}=\left[\frac{I\cdot x_1\cdot\left(1-\beta_1^{-1}\right)-\left(I-\frac{c}{r}\right)}{I\cdot x_1\cdot\left(1-\beta_2^{-1}\right)-\left(I-\frac{c}{r}\right)}\right]^{\frac{1}{\beta_1-\beta_2}}$$

En introduisant cette expression dans la 3° condition aux bornes et en notant *c*' = *c*/*I*, on obtient l'équation suivante en x_1 :

$$\left[\frac{x_1\cdot\left(1-\beta_1^{-1}\right)-\left(1-\frac{c'}{r}\right)}{x_1\cdot\left(1-\beta_2^{-1}\right)-\left(1-\frac{c'}{r}\right)}\right]^{\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}}\cdot\left[x_1\cdot\frac{1-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}-\left(1-\frac{c'}{r}\right)\cdot\frac{-\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\right]$$

$$+\left[\frac{x_1\cdot\left(1-\beta_1^{-1}\right)-\left(1-\frac{c'}{r}\right)}{x_1\cdot\left(1-\beta_2^{-1}\right)-\left(1-\frac{c'}{r}\right)}\right]^{\frac{\beta_2}{\beta_1-\beta_2}}\cdot\left[x_1\cdot\frac{\beta_1-1}{\beta_1-\beta_2}-\left(1-\frac{c'}{r}\right)\cdot\frac{\beta_1}{\beta_1-\beta_2}\right]-\frac{c'}{r}=0 \tag{10}$$

Cette équation ne peut être résolue que numériquement. Mais, il est intéressant de constater que les valeurs critiques x_1 et x_2 sont fonction d'un nombre réduit de paramètres : σ_2 qui rend l'attente attractive et r, α et c' qui sont des termes de coût (coût du capital, attribution traduisant une perte d'avantage compétitif et « cash-burning » dans la phase de développement).

En réarrangeant les termes, on peut exprimer la valeur de l'entreprise pour ses actionnaires en T :

$S_T(x)=I\cdot[x-1]$ si $x>x_1$
$S_T(x)=I\cdot[x_1\cdot\Phi_1(x)-\Phi_2(x)]$ si $x_2<x<x_1$
$S_T(x)=0$ si $x<x_2$

avec

$$\Phi_1(x)=\Phi_2(x)+\frac{\left\{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_1}\cdot\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right]-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right\}-\left\{\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_2}\cdot\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right]-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right\}}{\beta_1\cdot\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right]-\beta_2\cdot\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right]}$$

$$\Phi_2(x)=\frac{\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_2}-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right]\cdot(\beta_1)+\left[\left(\frac{x}{x_1}\right)^{\beta_1}-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right]\cdot(-\beta_2)}{\beta_1\cdot\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right]-\beta_2\cdot\left[1-\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right]} \tag{11}$$

Notons, par ailleurs, qu'on peut réécrire $S_T(x)=I\cdot[x_1\cdot\Phi_1(x)-\Phi_2(x)]$ sous la forme :

$$S_T(x) = I \cdot \left[k_1 \cdot x^{\beta_1} + k_2 \cdot x^{\beta_2} + k_3\right]$$

avec

$$k_1 = \frac{x_1 \cdot \left[1 - \beta_2 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right] + \beta_2}{\beta_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right] - \beta_2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right]} \cdot \frac{1}{x_1^{\beta_1}}$$

$$k_2 = \frac{x_1 \cdot \left[\beta_1 - 1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right] - \beta_1}{\beta_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right] - \beta_2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right]} \cdot \frac{1}{x_1^{\beta_2}}$$

$$k_3 = -\frac{\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1} \cdot \left[x_1 \cdot (1 - \beta_2) + \beta_2\right] + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2} \cdot \left[x_1 \cdot (\beta_1 - 1) - \beta_1\right]}{\beta_1 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_2}\right] - \beta_2 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\beta_1}\right]} \tag{11'}$$

De manière approchée, les ratios $\left(\frac{x}{x_1}\right)$ et $\left(\frac{x}{x_2}\right)$ mesurent respectivement la capacité à devenir rentable à l'avenir et le risque de défaillance (plus ce dernier ratio est proche de 1).

Le recours à la variable x n'est pas nécessairement intuitif. Pour lui donner un contenu pratique, il suffit de remarquer qu'il s'agit du ratio de la valeur capitalisée du cash-flow attendu par l'investissement requis :

$$x = \frac{\frac{Cash-flow}{\delta}}{I}$$ où δ désigne le taux de capitalisation attendu sur le marché

L'un des intérêts de ce modèle est de mettre en exergue le ratio $\frac{S_T(x)}{I}$ qui peut être interprété comme le Q de Tobin moins 1. Ce modèle suggère qu'il est opportun d'introduire la start-up sur le marché financier avant la phase d'industrialisation afin de bénéficier d'une valorisation relative flatteuse.

3. Détermination de la valeur actuelle

Connaissant la valeur terminale de l'entreprise pour ses actionnaires en *T*, il reste à déterminer sa valeur initiale. Entre la date présente et la fin du pacte initial, la dynamique de *x* est décrite par le mouvement brownien géométrique :

$$dx = \mu_1 \cdot x \cdot dt + \sigma_1 \cdot dz$$

Il s'en suit que :

$$E[x_T] = x_0 \cdot e^{\mu_1 T}$$

En notant λ la prime de risque, nous pouvons écrire :

$$\mu_1 = r + \lambda \cdot \sigma_1$$

En univers risque neutre, $\log(x_T)$ suit une distribution normale :

$$N\left(\log\left(E[x_T] - \left(\lambda \cdot \sigma_1 + \tfrac{1}{2} \cdot \sigma_1^2\right) \cdot T\right), \sigma_1 \sqrt{T}\right)$$

Sachant que, vu les développements précédents (11') :

$$\begin{aligned}
&S_T(x) = I \cdot [x - 1] \quad \text{si } x > x_1 \\
&S_T(x) = I \cdot \left[k_1 \cdot x^{\beta_1} + k_2 \cdot x^{\beta_2} + k_3\right] \quad \text{si } x_2 < x < x_1 \\
&S_T(x) = 0 \quad \text{si } x < x_2
\end{aligned}$$

En conservant cette distribution de probabilité risque neutre, on peut écrire :

$$S_0 = e^{-r \cdot T} \cdot E[S_T(x)] \tag{12}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
&\beta_3 = 0 \\
&g(\beta) = e^{-\beta \cdot \left[\lambda \cdot \sigma_1 - (\beta - 1) \cdot \frac{\sigma_1^2}{2}\right] \cdot T} \\
&d(x, \beta) = \frac{\log\left(\frac{E[x_T]}{x}\right)}{\sigma_1 \cdot \sqrt{T}} - \left[\lambda - \left(\beta - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \sigma_1\right] \cdot \sqrt{T}
\end{aligned} \tag{13}$$

On obtient la solution suivante :

$$S_0 = e^{-r \cdot T} \cdot I \cdot \left\{ E[x_T] \cdot g(1) \cdot N(d(x_1, 1)) - N(d(x_1, 0)) + \sum_{j=1}^{j=3} k_j \cdot E[x_T]^{\beta_j} \cdot g(\beta_j) \cdot \left[N(d(x_1, \beta_j)) - N(d(x_2, \beta_j))\right] \right\} \tag{14}$$

La valeur de la start-up est ainsi fonction :

- de la taille de l'investissement ultérieur envisagé : I
- de la consommation en capital durant la phase de développement : c
- du potentiel de création de valeur anticipé par unité investie : $E[x_T]$
- du taux d'attrition attendu pour la deuxième période : α
- de l'incertitude qui pèse durant la première phase : σ_1
- de l'incertitude qui pèse au terme de la phase contractuelle T : σ_2
- de la durée de la phase contractuelle : T
- du prix du risque : λ
- du coût sans risque du capital : r

Par ailleurs, on peut estimer la probabilité que l'entreprise soit défaillante en T (qui est une probabilité plus petite que 1 moins la probabilité de réussir) : 1-$N(d(x_2,0))$. En pratique, il peut être plus facile d'estimer cette probabilité que le paramètre de risque σ_1. Il suffit alors de résoudre numériquement le problème en choisissant le paramètre de risque compatible avec la probabilité retenue.

Enfin, le modèle permet d'estimer le ratio attendu entre la valeur de marché et la valeur comptable au terme de la phase 1 si l'investissement est immédiatement entrepris (x_1) et de s'assurer ainsi du caractère raisonnable des prévisions.

4. Détermination du coût du capital pour la période contractuelle

En pratique, il est fréquent pour ceux qui sont amenés à prendre une participation dans une start-up d'estimer la valeur espérée de leurs titres au terme du contrat et de l'actualiser à un taux relativement élevé. La détermination de ce taux reste le plus souvent problématique. Dans le développement qui suit, nous fournissons une méthode d'estimation de ce taux actuariel pour la période T considérée.

Il est possible d'abord de procéder à l'estimation de la valeur espérée au terme de la période contractuelle. Rappelons que log(x_T) suit une distribution normale :

$$N\left(\log\left(E[x_T] - \left(\tfrac{1}{2}\cdot\sigma_1^2\right)\cdot T\right), \sigma_1\sqrt{T}\right)$$

Il est facile calculer $E[S_T(x)]$, sachant que, vu les développements précédents (11') :

$$
\begin{aligned}
&S_T(x) = I \cdot [x-1] \quad \text{si } x > x_1 \\
&S_T(x) = I \cdot \left[k_1 \cdot x^{\beta_1} + k_2 \cdot x^{\beta_2} + k_3\right] \quad \text{si } x_2 < x < x_1 \\
&S_T(x) = 0 \quad \text{si } x < x_2
\end{aligned}
$$

Posons :

$$
\begin{aligned}
h(\beta) &= e^{\left[\beta\cdot(\beta-1)\cdot\frac{\sigma_1^2}{2}\right]\cdot T} \\
f(x,\beta) &= \frac{\log\left(\frac{E[x_T]}{x}\right)}{\sigma_1 \cdot \sqrt{T}} - \left[\left(\beta - \tfrac{1}{2}\right)\cdot \sigma_1\right]\cdot\sqrt{T}
\end{aligned}
$$

On obtient la solution suivante :

$$
E[S_T] = I \cdot \left\{ E[x_T]\cdot h(1)\cdot N\left(f(x_1,1)\right) - N\left(f(x_1,0)\right) + \sum_{j=1}^{j=3} k_j \cdot E[x_T]^{\beta_j} \cdot h(\beta_j)\cdot\left[N\left(f(x_1,\beta_j)\right) - N\left(f(x_2,\beta_j)\right)\right]\right\} \tag{15}
$$

Le coût du capital durant la période contractuelle est égal à :

$$
\rho = \frac{1}{T}\cdot\log\left(\frac{E[S_T]}{S_0}\right) \tag{16}
$$

5. Simulations et étude du poids des facteurs

Dans l'exemple que nous allons développer, nous supposerons que la période contractuelle est de 3 ans, la taille de l'investissement envisagé *I* est de 1.000, le cash-flow libre espéré s'il y a industrialisation est de 120 et le taux de capitalisation est égal à 7,5%. Ainsi, la valeur attendue en cas de réalisation est de 120/0,075, soit 1.600, ce qui donne à la variable E[x_3] une valeur de 1,6. Les sommes dépensées chaque année (capital « brûlé ») s'élèvent à 60. Pour représenter le risque durant la deuxième période (au-delà de 3 ans), nous prendrons comme valeur 25% pour le paramètre σ_2 (incertitude) et 0,5% pour le paramètre d'attrition α. La première période est caractérisée par les paramètres σ_1 et λ égaux respectivement à 50% et 0,3. Enfin, le taux d'intérêt sans risque *r* est fixé à 5%.

Le modèle fournit les résultats suivants. Tout d'abord, le paramètre x_1 vaut 1,77. Nous voyons combien ce modèle capte une déviation importante par rapport à la règle de la simple VAN positive pour entreprendre l'industrialisation. Les exigences sont ici bien plus élevées. On retrouve un résultat standard de la littérature des options réelles mais aussi des attentes fortes souvent observées.

Tableau 1

Illustration d'une utilisation du modèle[1]

Données		*Contrôle*		*Résultats*	
I	1000			S_0	310,94
c	60	x_1	1,77		
FCF attendus	120			$E(S_T)$	807,11
taux de capitalisation	7,5%				
r	5,0%			c actualisés	167,15
σ_2	25,0%			Good-will initial	143,79
α	0,5%				
				Probabilité Échec	50,9%
T	3				
λ	0,3	x_2	0,72	ρ	31,8%
σ_1	50,0%				

Le paramètre x_2 vaut 0,72. Ceci signifie que si, d'ici 3 ans, les perspectives commerciales sont bien moins bonnes que celles attendues aujourd'hui et que le cash-flow libre attendu est inférieur à 54 au lieu de 120, alors l'entreprise fera défaillance dans 3 ans. Ses propriétaires estimeront qu'il vaut mieux cesser de « brûler » du capital vu la valeur insuffisante de l'option réelle. La probabilité attachée à une telle éventualité est conséquente : suivant le modèle, elle vaut 50,9%.

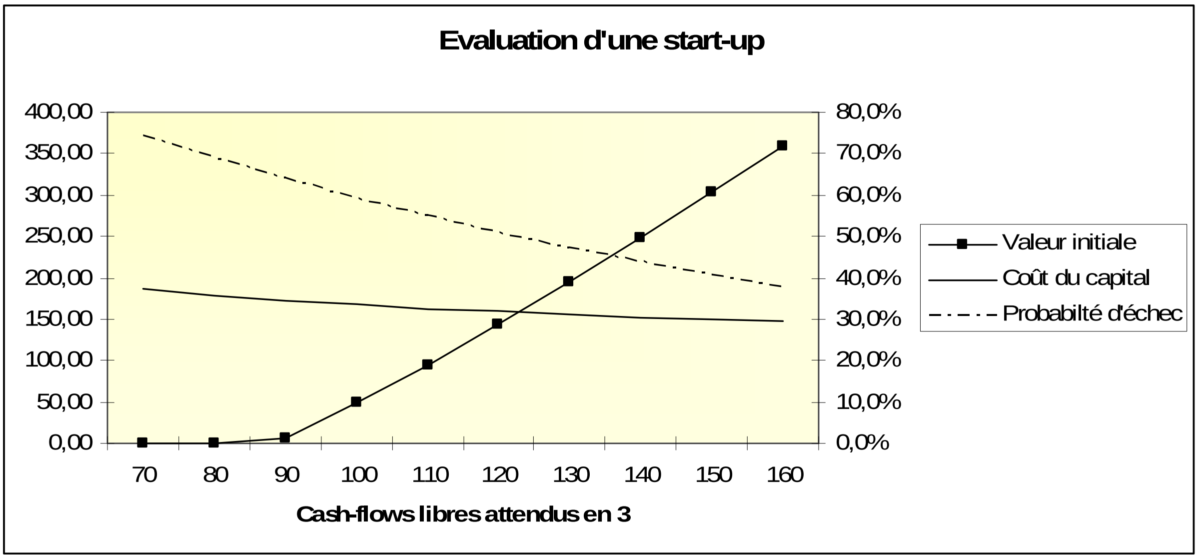
La valeur présente des dépenses d'exploitation (60 chaque année) est égale à 167,15. Nous avons supposé que cette somme est disponible en trésorerie, qu'il n'y donc pas de risque de défaillance tout au long des 3 premières années et que le contrat est irréversible durant la première période. La valeur de l'option sur le projet futur est estimée à 310,94. Le projet est donc viable puisque ce dernier montant est supérieur à la valeur présente des dépenses à venir. Le good-will initial est, par différence, estimé à 143,79. L'importance de cet incorporel n'est pas en soi exceptionnelle pour ce genre d'entreprise.

[1] Le modèle est téléchargeable sous forme d'un fichier xls sur le site http://esa.univ-lille2.fr//enseignants/PagesPersos/MLevasseur.

Enfin, la valeur espérée à l'année 3 de cette entreprise est de 807,11. Le taux de rentabilité attendu par les actionnaires, ou encore son coût du capital puisqu'elle n'a pas de dettes est donc pour ces 3 ans de 31,8%. On retrouve là des normes habituelles pour ce genre d'activité.

Figure n°1 :

Valeurs simulées en fonction des cash-flows libres attendus en 3



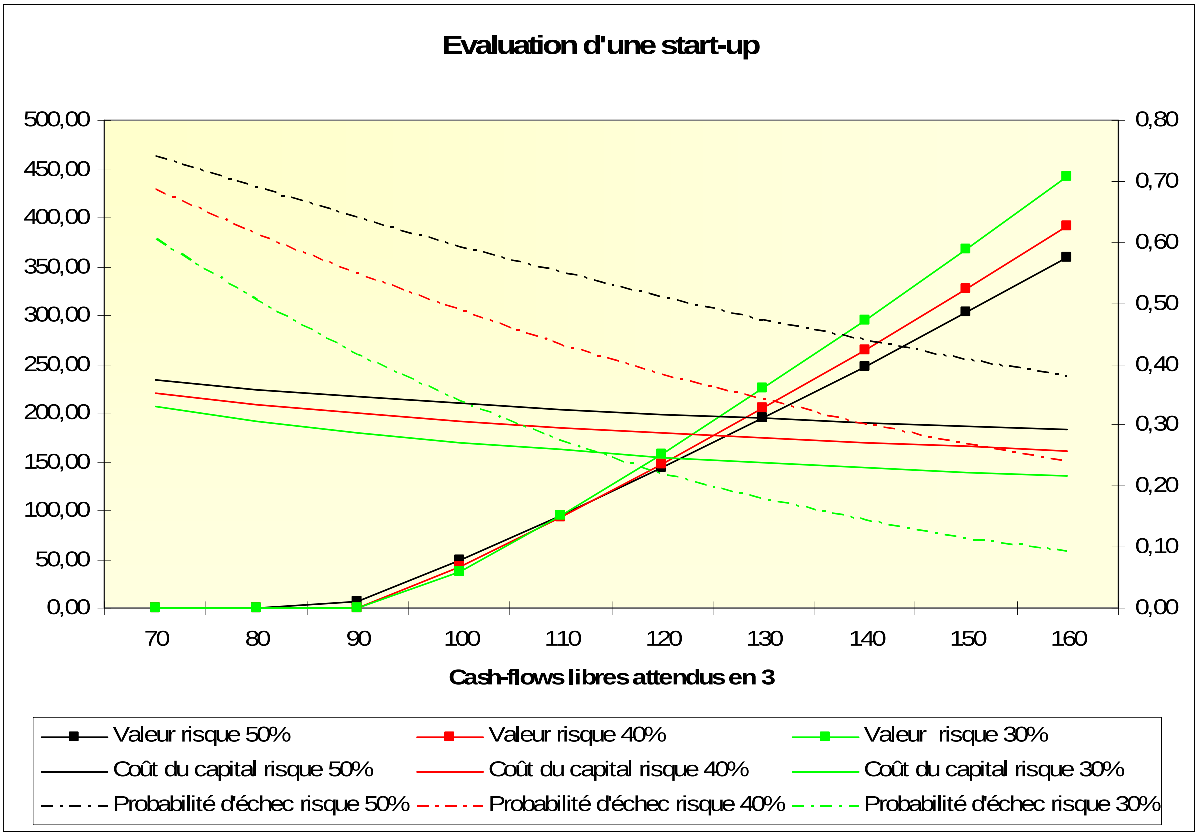
La figure 1 permet de retrouver un résultat classique en matière d'option : la valeur de la firme est croissante et convexe en fonction des cash-flows libres attendus. Par ailleurs, le coût du capital est décroissant : plus les perspectives sont favorables, moins grandes sont les exigences de rémunération et plus faible aussi est la probabilité d'échec en 3. Par ailleurs, on peut être surpris du fait que la valeur de l'entreprise devient nulle à partir d'un cash-flow libre espéré inférieur à 88,4 alors que le seuil de défaille correspondant à x_2 était d'environ 54. En fait, l'exigence d'entreprendre au départ est supérieure à celle de continuer en 3 parce que les dirigeants s'engagent, par hypothèse dans ce modèle, pour une période de 3 ans. Au-delà, des 3 ans, ils peuvent mettre fin à l'aventure à tout moment. C'est cette flexibilité supplémentaire qui se trouve ici valorisée.

Si on rapporte la prime de risque implicite dans le coût du capital trouvé pour les 3 premières années, soit 26,8%, chiffre obtenu en faisant la différence entre le coût du capital 31,8% et le taux sans risque 5% dans l'exemple précédent, à la prime de risque de base supposée dans le modèle, soit la mesure de risque σ_1 50% multipliée par le coefficient de prix du risque λ égal ici à 0,3 ou encore 15%, on obtient un ratio relatif d'environ 1,8. Ce ratio se rapproche des mesures de type Ω dans la littérature des « grecques ». Il est intéressant de constater que lorsqu'on régresse les valeurs obtenues pour ce ratio et les probabilités d'échec projetées à la figure 1, on obtient une relation linéaire forte (R^2 égal à 99,4%).

La figure n°2 propose 3 simulations en fonction d'un niveau d'incertitude différent au cours de la première période. Les valeurs retenues pour le paramètre σ_1 sont respectivement 30%, 40% et 50%. Il apparaît que le coût du capital sur la première période est une fonction croissante du risque. Il en va de même pour la probabilité d'abandon immédiat en période 3. En revanche, l'effet sur la valeur est plus complexe. Lorsque la valeur anticipée des cash-flows attendus en 3 est très faible, la probabilité que le projet soit abandonné est d'autant plus grande que l'incertitude pesant sur la première période est faible. Le projet apparaît peu attirant et il y a peu de chances que les choses ne changent quand σ_1 est petit. On retrouve la relation classique d'une valeur d'option influencée positivement par la volatilité attendue. Mais les choses sont plus complexes pour les valeurs élevées des cash-flows attendus en 3. Si σ_1 est élevé, la probabilité d'abandon n'est pas négligeable et la probabilité que l'option réelle contenue dans la valeur terminale soit exercée immédiatement est aussi élevée. Ainsi, l'effet de cette volatilité sur la valeur initiale est dans les deux cas négatifs : une valeur terminale le plus souvent nulle ou contenant une valeur temps faible.

Figure n°2 :

Risque et valeurs simulées en fonction des cash-flows libres attendus en 3



Cette simple simulation permet aussi de tirer quelques enseignements concernant le coût du capital durant la première période de 3 ans. Dans les 3 situations, les taux sont élevés : de 37% à 29% pour σ_1 égal à 50%, de 35% à 26% pour σ_1 égal à 40% et de 33% à 22% pour σ_1 égal à 30%. La relation entre le ratio Ω évoqué précédemment et la probabilité d'abandon reste fortement linéaire, comme l'illustre le tableau n°2.

Tableau 2

Ratio Ω et probabilité d'abandon

σ_1	R^2	*Pente*	*Constante*
50%	99,4%	1,44	1,07
40%	99,8%	1,73	1,32
30%	99,9%	2,39	1,66

Cependant, les coefficients des droites de régression ne sont pas constants. Cette simulation illustre le fait qu'il y a bien deux déterminants au moins derrière ces primes de risque élevées : le risque de défaillance et le levier implicite élevé en cas de réussite. En effet, le fait de différer l'investissement expose l'investisseur à un décaissement important futur et crée un passif implicite. Dans les cas évoqués ci-dessus, lorsque la volatilité est élevée, pour toutes les valeurs envisagées de cash-flows futurs, la probabilité d'abandon reste toujours non négligeable. A elle seule, elle peut rendre compte du risque. Quand la volatilité est plus faible, cette probabilité d'abandon devient négligeable pour les valeurs élevées de cash-flows attendus et elle n'est plus suffisante pour rendre compte à elle seule du risque. La constante plus grande de la droite de régression vient traduire la présence d'un levier probable en cas de réussite.

6. Conclusions

L'intérêt de l'utilisation des modèles d'options réelles pour la valorisation d'entreprises de type « start-up » est de bien montrer que le recours à des taux d'actualisation élevés de leurs flux espérés ne tient pas seulement au fait que ces entreprises ne sont pas cotées en bourse ou que leurs titres souffrent d'une liquidité médiocre (Pratt, S., Reilly, R. et Schweihs, R., 2000). Indépendamment de ces arguments, leur coût du capital est élevé du fait même de la caractéristique de leurs flux attendus.

Au-delà de cette constatation, la simulation suggère qu'il y a bien deux facteurs de risque à prendre en compte : le risque de défaillance et le levier en cas de succès. C'est bien parce que ces deux facteurs sont intimement mêlés qu'il est difficile de fournir une règle simple de détermination du coût du capital.

Aussi, la valorisation à partir d'un modèle de type option réelle fournit une autre voie qui mérite en pratique d'être prise en considération. Nous suggérons ici de l'intégrer dans un cadre habituel de représentation du futur d'une telle entreprise, à savoir deux périodes distinctes : l'une réservée à la phase initiale de développement, l'autre traduisant un fonctionnement plus mature. Les paramètres utilisés sont habituels dans toute procédure d’évaluation : cash-flows attendus en cas de réussite, montant de l’investissement à réaliser dans le futur, coût de fonctionnement dans l’immédiat, confiance accordée aux prévisions, taux d’intérêt et prime de risque pour l’industrie. Le paramètre d’attrition est moins courant mais il vient mesurer la perte d’avantage concurrentiel avec le temps qui passe. Son calibrage est important pour rendre compte de l’option réelle qui subsiste dans la valeur en fin de première période. C’est là aussi un des attraits de ces modèles qui n’imposent pas comme règle de décision pour la réalisation complète du projet, la seule règle de la VAN positive (Dixit, A., Pindyck, R. et Sodal S., 1999). Au contraire, l’exigence est ici plus élevée et elle correspond bien au fait que les entreprises qui lèvent des capitaux au terme de leur période de développement initial ont des valorisations bien supérieures aux sommes investies ou à leur valeur comptable.

Références :

Brennan, M. et Trigeorgis, L. (1999) *Project Flexibility, Agency and Competition: New Developments in the Theory and Applications of Real Options*, Oxford University Press.

Dixit, A. et Pindyck, R. (1996) *Investment Under Uncertainty*, 2° édition, Princeton University Press.

Dixit, A., Pindyck, R. et Sodal S. (1999), “A Markup Interpretation of Optimal Investment Rules”, *The Economic Journal*, 109 (April), 179-189.

Pratt, S., Reilly, R. et Schweihs, R. (2000), *Valuing a Business : The Analysis and the Appraisal of Closely Held Companies*, 4° edition, Mac Graw Hill.

Trigeorgis, L. (1996) *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, The MIT Press.