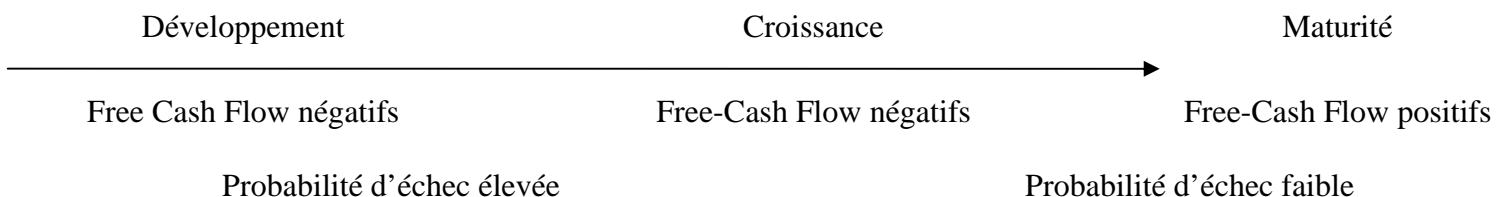


Estimation du coût du capital pour une start-up

Michel LEVASSEUR (2007)

1. Le coût du capital pour une start-up apparaît souvent très grand en comparaison de celui observé pour des entreprises plus matures. La raison principalement évoquée pour justifier cet état de fait est la présence fréquente d'échecs pour ce type d'entreprises. L'objectif de cette note pédagogique est de montrer combien la théorie d'évaluation par les options (P.T.O.) permet d'explicitier ces situations.
2. D'un point de vue financier, l'arrêt d'une exploitation devient souhaitable si les décaissements à réaliser et nécessaires à la continuation de l'affaire sont plus importants que la valeur conservée par le prolongement de cette exploitation. Ainsi, envisageons 2 cas triviaux :
 - 1) l'entreprise A peut générer un flux continu positif et ne nécessite aucune mise de fonds. Nul n'a intérêt à interrompre son exploitation et sa probabilité d'arrêt est nulle ;
 - 2) l'entreprise B peut générer un flux continu de 100 qui, capitalisé à un taux de 10 % vaut 1.000 à condition d'investir un montant de 2.500. Mieux vaut arrêter l'exploitation car la VAN (- 1500) est négative.
3. Au fond, dès que le risque d'échec est grand, apparaît une situation où les flux de décaissements sont importants au regard des valeurs prises par les firmes considérées. Un exemple typique est celui de la start-up où le graphe no 1 traduit la dynamique de ses flux :

Graphe n°1 : Dynamique des flux et probabilité d'échec



4. L'échange probable et conditionnel entre une valeur acquise et un décaissement est bien représenté dans le monde des options par le call. Une start-up peut être considérée comme un call. Il s'agit bien, moyennant l'investissement dans l'immédiat de sommes d'argent, de pouvoir accéder en cas de succès à un actif de qualité. Si la probabilité de réussite est grande, on peut dire que ce call réel est dans la monnaie ; si elle est faible, il est en dehors de la monnaie. A la limite, on peut dire qu'une entreprise mature qui est caractérisée par une probabilité de défaillance faible est comparable à un call profondément dans la monnaie. Les sommes à investir sont dans ce cas faibles par rapport aux valeurs déjà acquises, l'option d'abandon est négligeable.

5. La théorie des options, à commencer par le modèle le plus populaire de Black et Scholes, fournit un cadre très pratique pour mieux comprendre les relations de valeur et de taux qui sont présentes dans ces données.

Supposons qu'une start-up ne dispose que d'un actif immatériel (un savoir-faire) qui lui permette à une époque rapprochée t d'investir un montant K et de générer par la suite un flux de ressources d'une valeur actualisée X . Bien évidemment, la décision d'industrialisation ne sera prise que si la VAN en t est positive ou encore si

$$X_t \geq K$$

La valeur actuelle de cette start-up est donnée par le modèle de Black et Scholes suivant l'équation :

$$V = X_0 N(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2)$$

La première partie du terme de droite $X_0 N(d_1)$ représente la valeur présente du projet industriel en tenant compte de la probabilité de sa réalisation.

La deuxième partie $Ke^{-rt} N(d_2)$ représente la valeur espérée de l'investissement à venir où Ke^{-rt} mesure la valeur présente (au taux sans risque) et $N(d_2)$ la probabilité risque-neutre de réussite.

6. Dans une économie où les possibilités d'arbitrage sont épuisées, telle qu'elle est supposée au sein de la théorie des options, il existe un prix unique du risque : λ . Par ailleurs, la source de risque pour V est ici X . Vu l'équation de Black et Scholes, les variations de valeur dV induites par les variations de X , soit dX , peuvent être estimées par : $dV = N(d_1)dX$

Aussi, les mesures de risque (bêta ou écart-type) prises sur $\frac{dX}{X}$ et $\frac{dV}{V}$ vérifient la relation :

$$\text{Risque}_V = \frac{N(d_1) * X}{V} * \text{Risque}_X$$

En notant $\Omega = \frac{N(d_1) * X}{V}$, on obtient dès lors les 2 relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_X &= [r + \beta_X * \lambda] * dt \\ \text{et} \\ \mu_V &= [r + \beta_X * \Omega * \lambda] * dt \end{aligned}$$

Dans la mesure où Ω est toujours supérieur à 1 (Ω correspond au coefficient habituel en finance corporative de 1+levier), il est clair que le coût du capital d'une start-up μ_V , est toujours supérieur à la rentabilité exigée pour un actif qui réplique le risque propre aux encaissements attendus à long terme.

7. Illustration :

Supposons une société qui développe dans 3 ans un nouveau produit. La mise de fonds dans 3 ans est de 1,2 M d'euros pour réussir l'industrialisation. L'espérance dans 3 ans de la valeur actualisée des flux qui seront secrétés à partir de l'année 4 est 1,464 M. Sa valeur présente (actualisée au taux de 10 %) est 1 M d'euros. La volatilité attendue pour cette valeur est estimée à 20 %. Le modèle de Black et Scholes donne une valeur de 0,111 M pour cette société (avec un taux sans risque de 4 %).

Le coefficient Ω est égal à 4,83. La probabilité risque-neutre d'exercice $N(d_2)$ s'élève à 40 %. On peut ainsi dire que si la prime de risque est de 10 % - 4 % = 6 % pour l'actualisation des seuls flux encaissés, elle s'élève à 6 % * 4,83 = 33 % pour l'actualisation de la valeur de la firme.

Dans cet exemple, si nous avions eu affaire à une entreprise mature confrontée à des décaissements à venir faibles, les termes $N(d_1)$ et $N(d_2)$ eurent été proches de 1, de même le coefficient Ω . Dans ce cas, le coût du capital eût été de 10 %. Nous voyons donc que c'est bien le fait que les décaissements à venir soient importants et que la probabilité d'échec soit forte qui rendent le coût du capital élevé.

Nous avons eu besoin pour expliquer ce résultat d'hypothèses ni sur une prime d'illiquidité, ni sur un surcoût lié à un type particulier d'intermédiaire financier.

8. Pour bien comprendre le résultat précédent, il faut avoir à l'esprit que l'option est un actif financier à levier élevé. Les décaissements sont repoussés vers le futur et constituent une dette.

Lorsqu'on actualise la valeur finale attendue d'une start-up au terme de la période de décollage à un taux unique correspondant au coût du capital habituel (dans l'exemple 10 %), on ne tient pas compte de ce levier.

A l'opposé, le modèle de Black et Scholes procède bien implicitement à l'actualisation à 2 taux différents des flux qui le concernent :

- au taux de 10 % dans l'exemple des flux dans la partie : $X_0 N(d_1)$,

- au taux de 4 % dans l'exemple des flux dans la partie : $-Ke^{-rt} N(d_2)$.

En actualisant à un taux trop élevé (10 %) les flux certains de décaissement, on majore indûment la valeur de l'entreprise. Il n'y a que 2 solutions correctes : ou actualiser chaque composante à son taux, ou actualiser la différence à un taux plus élevé.

9. On pourrait objecter que dans la réalité, les flux de décaissement sont eux aussi incertains. Dans ce cas, la difficulté majeure tient dans la nature de la corrélation entre les deux variables aléatoires. Dans le cas particulier d'une corrélation parfaite positive, il est clair que les deux positions, représentées l'une par la variable X (long) et l'autre par K (short), voient leur risque se compenser. Dès lors la position résiduelle, X-K a le même risque (béta ou écart-type du taux de variation) que X. Mais, dans ce cas, l'aspect optionnel du problème disparaît puisque la probabilité de réussite ne peut être égale qu'à 1 ou 0. Ceci se comprend aisément puisque selon cette hypothèse, l'incertitude n'existe que sur le montant à investir. La rentabilité, ici mesurée à travers le ratio VAN/Investissement, est supposée certaine.

En revanche, si la corrélation est inférieure à 1, le caractère optionnel du problème est conservé. La valeur de cette option est beaucoup plus difficile à calculer et le modèle de Black et Scholes est insuffisant. Il est clair que plus la corrélation décroît, plus elle est grande. Si la corrélation est voisine de zéro, la valeur de l'option doit être quelque peu supérieure à celle donnée par le modèle de Black et Scholes, vu la convexité de la fonction d'évaluation d'un call

En pratique, il est douteux qu'existe une corrélation positive entre ces deux variables. Dans l'espace de temps consacré au développement, les deux types de risque apparaissent plutôt indépendants, voire faiblement négativement corrélés. Aussi, l'approximation fournie par le modèle de Black et Scholes nous apparaît suffisante. Il conviendrait de vérifier empiriquement la validité d'une telle assertion.

10. Le modèle des options à la Black et Scholes peut fournir une aide pour le choix d'un taux d'actualisation adapté. Un bon point de départ est que le plus souvent les praticiens estiment une probabilité de réussite (ou d'échec). N'oublions pas que dans le modèle de valorisation des options, cette probabilité est donnée par l'expression

$N(d)$ avec $N(.)$ désignant la fonction normale standard et

$$d = \frac{\ln\left[\frac{X_0}{K * e^{-\mu t}}\right]}{\sigma\sqrt{t}} = \frac{\ln\left[\frac{E(X_t)}{K}\right]}{\sigma\sqrt{t}} - \frac{1}{2} * \sigma * \sqrt{t} .$$

Il est donc possible à partir d'une estimation de la probabilité d'en déduire une valeur du paramètre d . Si l'analyste est capable d'établir une prévision raisonnable pour les paramètres :

t : durée de développement de la start-up

σ : volatilité entourant la valeur créée au terme du développement

il est alors facile d'estimer le paramètre $\ln\left[\frac{E(X_t)}{K}\right]$ qui mesure la « moneyness » de l'option réelle ou encore l'importance de la valeur créée (ce ratio de profitabilité est voisin du simple rapport entre la VAN attendue et la mise de fonds envisagée).

Notons qu'il est possible aussi à partir d'une hypothèse sur ce ratio d'estimer la volatilité implicite σ .

$$\sigma = -N^{-1}(p) + \sqrt{N^{-1}(p) + 2 * \ln\left[\frac{E(X_t)}{K}\right]}$$

où $N^{-1}(p)$ est la fonction normale standard inverse et p la probabilité de succès.

Cette partie de l'analyse est particulièrement utile en pratique parce qu'elle permet de vérifier la cohérence entre les hypothèses portant sur la probabilité de réussite, la profitabilité attendue et la volatilité. Il peut apparaître que l'hypothèse portant sur la probabilité de réussite est notablement surestimée au vu de la profitabilité et la volatilité attendues.

A partir des paramètres précédents et en faisant une hypothèse sur la valeur présente X_0 de $E(X_t)$, il est facile de calculer :

a) la probabilité risque neutre $N(d_2)$ avec

$$d_2 = d - \frac{\left(\ln\left(\frac{X_t}{X_0}\right) - r\right) * t}{\sigma\sqrt{t}}$$

Notons que dans l'expression précédente, le terme négatif de droite correspond à une correction pour le risque. Au numérateur de la fraction, figure une prime de risque,

au dénominateur une quantité de risque. La probabilité risque neutre est donc bien inférieure à la probabilité initialement formulée.

b) $N(d_1)$ ou delta de l'option réelle, sachant que $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{t}$

$$c) \Omega \text{ égal à } \frac{N(d_1)}{N(d_1) - \frac{K * e^{-rt}}{X_0} N(d_2)}$$

En émettant une hypothèse sur le coût du capital d'une société sans levier pour le secteur considéré (de risque β_U) en prenant en considération éventuellement une rémunération du risque total (σ), il est alors possible d'en tirer une estimation du coût du capital pour la start-up :

$$k = r + (\beta_U * [r_m - r] + \sigma * [r_e - r]) * \Omega$$

Notons par ailleurs que l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$X_0 = \frac{E(X_t)}{e^{(r + (\beta_U * [r_m - r] + \sigma * [r_e - r]))t}}$$

Notons enfin que cette approximation procure une estimation légèrement surévaluée puisqu'elle ne tient pas compte de la baisse de valeur de ces statistiques à proximité de l'échéance. Cependant, le lecteur pourra vérifier le caractère satisfaisant de l'estimation en comparant une solution exacte et cette solution approchée (Annexe 1)

11. Le tableau suivant fournit quelques estimations pour différentes valeurs des paramètres retenus :

Données de base

r	4%	σ	20%	λ	6%	t	4	p	60%
Solution obtenue		Ω	3,81	k	26,9%				

Simulation : valeurs des coefficients Ω

en fonction des probabilités de réussite et de différents niveaux de volatilité

σ	Prob	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%
	15%	3,55	4,25	4,83	5,38	5,93	6,50	7,15	7,95	9,11
	20%	2,56	3,03	3,43	3,81	4,19	4,60	5,07	5,64	6,48

Ce document pédagogique a été rédigé par le Professeur Michel Levasseur dans le cadre des enseignements du Master Sciences de Gestion Administration des Affaires de la Faculté de Finance, Banque, Comptabilité de l'Université du Droit et de la Santé – Lille 2. Il a été écrit comme base de discussion lors d'un cours. L'université n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans ce document. Ces opinions doivent être considérées comme propres à l'auteur.

	25%	2,04	2,39	2,69	2,97	3,26	3,58	3,93	4,38	5,04
	30%	1,74	2,00	2,23	2,46	2,69	2,94	3,23	3,59	4,13
	35%	1,54	1,75	1,93	2,11	2,30	2,51	2,75	3,05	3,50
	valeurs du coût du capital k									
	en fonction des probabilités de réussite et de différents niveaux de volatilité									
	Prob	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%
σ	15%	25,3%	29,5%	33,0%	36,3%	39,6%	43,0%	46,9%	51,7%	58,6%
	20%	19,3%	22,2%	24,6%	26,9%	29,2%	31,6%	34,4%	37,8%	42,9%
	25%	16,3%	18,3%	20,1%	21,8%	23,6%	25,5%	27,6%	30,3%	34,2%
	30%	14,4%	16,0%	17,4%	18,8%	20,1%	21,6%	23,4%	25,5%	28,8%
	35%	13,2%	14,5%	15,6%	16,7%	17,8%	19,1%	20,5%	22,3%	25,0%

Ce document pédagogique a été rédigé par le Professeur Michel Levasseur dans le cadre des enseignements du Master Sciences de Gestion Administration des Affaires de la Faculté de Finance, Banque, Comptabilité de l'Université du Droit et de la Santé – Lille 2. Il a été écrit comme base de discussion lors d'un cours. L'université n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans ce document. Ces opinions doivent être considérées comme propres à l'auteur.

Simulation : valeurs des coefficients Ω

en fonction des probabilités de réussite et de différentes durées de développement

	Prob	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%
t	1	4,22	5,10	5,85	6,57	7,31	8,09	8,99	10,11	11,75
	2	3,24	3,88	4,43	4,95	5,48	6,05	6,69	7,49	8,67
	3	2,81	3,35	3,80	4,23	4,67	5,14	5,67	6,33	7,30
	4	2,56	3,03	3,43	3,81	4,19	4,60	5,07	5,64	6,48
	5	2,38	2,81	3,18	3,52	3,87	4,24	4,65	5,17	5,93

valeurs du coût du capital k

en fonction des probabilités de réussite et de différentes durées de développement

	Prob	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%
t	1	29,3%	34,6%	39,1%	43,4%	47,8%	52,6%	57,9%	64,6%	74,5%
	2	23,4%	27,3%	30,6%	33,7%	36,9%	40,3%	44,1%	48,9%	56,0%
	3	20,9%	24,1%	26,8%	29,4%	32,0%	34,8%	38,0%	42,0%	47,8%
	4	19,3%	22,2%	24,6%	26,9%	29,2%	31,6%	34,4%	37,8%	42,9%
	5	18,3%	20,9%	23,1%	25,1%	27,2%	29,4%	31,9%	35,0%	39,6%

Annexe 1

Estimations des taux actuariels à partir des rapports entre valeurs espérées et valeurs présentes des options réelles

Données de base

r 4% σ 20% λ 6% t 4 p 60%

Solution obtenue

Ω	3,62	k	25,7%
----------	------	---	-------

Simulation : valeurs des coefficients Ω

en fonction des probabilités de réussite et de différents niveaux de volatilité

	Prob	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%
σ	15%	3,21	3,90	4,50	5,09	5,71	6,39	7,20	8,23	9,84
	20%	2,38	2,83	3,23	3,62	4,03	4,49	5,02	5,70	6,76
	25%	1,93	2,26	2,56	2,85	3,15	3,48	3,88	4,38	5,16
	30%	1,66	1,92	2,14	2,37	2,60	2,87	3,17	3,57	4,18
	35%	1,49	1,69	1,87	2,05	2,24	2,45	2,70	3,03	3,52
	valeurs du coût du capital k									
en fonction des probabilités de réussite et de différents niveaux de volatilité										
σ	15%	23,2%	27,4%	31,0%	34,5%	38,3%	42,4%	47,2%	53,4%	63,0%
	20%	18,3%	21,0%	23,4%	25,7%	28,2%	30,9%	34,1%	38,2%	44,5%
	25%	15,6%	17,6%	19,3%	21,1%	22,9%	24,9%	27,3%	30,3%	34,9%
	30%	14,0%	15,5%	16,9%	18,2%	19,6%	21,2%	23,0%	25,4%	29,1%
	35%	12,9%	14,1%	15,2%	16,3%	17,4%	18,7%	20,2%	22,2%	25,1%

Simulation : valeurs des coefficients Ω

en fonction des probabilités de réussite et de différentes durées de développement

	Prob	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%
t	1	4,28	5,28	6,19	7,09	8,06	9,15	10,45	12,17	14,92
	2	3,14	3,81	4,40	4,99	5,62	6,31	7,12	8,19	9,85
	3	2,66	3,19	3,66	4,12	4,61	5,15	5,78	6,60	7,87
	4	2,38	2,83	3,23	3,62	4,03	4,49	5,02	5,70	6,76
	5	2,19	2,59	2,94	3,29	3,65	4,05	4,52	5,11	6,03
valeurs du coût du capital k										
en fonction des probabilités de réussite et de différentes durées de développement										
t	1	29,7%	35,7%	41,1%	46,6%	52,4%	58,9%	66,7%	77,0%	93,5%
	2	22,8%	26,8%	30,4%	34,0%	37,7%	41,8%	46,7%	53,1%	63,1%
	3	19,9%	23,1%	26,0%	28,7%	31,7%	34,9%	38,7%	43,6%	51,2%
	4	18,3%	21,0%	23,4%	25,7%	28,2%	30,9%	34,1%	38,2%	44,5%

5	17,1%	19,5%	21,7%	23,7%	25,9%	28,3%	31,1%	34,7%	40,2%
---	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Annexe 2

Développements analytiques

Désignons par X_T la valeur actualisée en T de tous les encaissements générés par l'exploitation de la start-up au-delà de T.

Désignons par X_t la valeur présente en t du montant X_T . Supposons que la dynamique de X_t soit définie par l'équation suivante :

$$X_t = X_0 * e^{\mu * t + z * \sigma * \sqrt{t}}$$

où z est une variable aléatoire qui suit une distribution normale centrée et réduite.

En T, l'investissement sera engagé si la VAN est positive ou encore si :

$$X_T - K \geq 0$$

où K désigne la mise de fonds à réaliser

1. : Calcul de la valeur espérée de l'option réelle

La valeur espérée générée par cet investissement hypothétique est égale à :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{+\infty} \left[X_0 * e^{\mu * T + z * \sigma * \sqrt{T}} - K \right] * e^{-\frac{z^2}{2}} * dz$$

avec $-d$ tel que $X_0 * e^{\mu * T - d * \sigma * \sqrt{T}} - K = 0$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{+\infty} \left[X_0 * e^{\mu * T} * e^{\frac{z^2 - 2 * z * \sigma * \sqrt{T}}{2}} \right] * dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{+\infty} K * e^{-\frac{z^2}{2}} * dz$$

ou encore

Ce document pédagogique a été rédigé par le Professeur Michel Levasseur dans le cadre des enseignements du Master Sciences de Gestion Administration des Affaires de la Faculté de Finance, Banque, Comptabilité de l'Université du Droit et de la Santé – Lille 2. Il a été écrit comme base de discussion lors d'un cours. L'université n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans ce document. Ces opinions doivent être considérées comme propres à l'auteur.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * X_0 * e^{\mu * T} * \int_{-d}^{+\infty} \left[e^{-\frac{[z - \sigma * \sqrt{T}]^2}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2}} \right] * dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * K * \int_{-d}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} * dz$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} * X_0 * e^{\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] * T} * \int_{-\infty}^d \left[e^{-\frac{[z - \sigma * \sqrt{T}]^2}{2}} \right] * dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * K * \int_{-\infty}^d e^{-\frac{z^2}{2}} * dz$$

Notons que $E(X_T) = X_0 * e^{\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] * T}$ et que la valeur espérée en T de l'option réelle est égale à :

$$E(X_T) * N(d + \sigma \sqrt{T}) - K * N(d)$$

$$\text{avec } d = \frac{\ln\left(\frac{E(X_T)}{K}\right)}{\sigma \sqrt{T}} - \frac{\sigma}{2} \sqrt{T}$$

$N(d)$ est la probabilité de succès de l'investissement.

2. : Évaluation de l'option réelle

Pour un investisseur risqué neutre, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$E(X_T) * e^{-r * T} = X_0 * e^{\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] * T} * e^{-r * T} = X_0$$

$$\text{Valeur de l'option} = E(X_T) * e^{-r * T} * N(d + \sigma \sqrt{T}) - K * e^{-r * T} * N(d)$$

Après simplification, on obtient le modèle standard de Black et Scholes :

$$\text{Valeur de l'option} = X_0 * N(d_2 + \sigma \sqrt{T}) - K * e^{-r * T} * N(d_2)$$

Ce document pédagogique a été rédigé par le Professeur Michel Levasseur dans le cadre des enseignements du Master Sciences de Gestion Administration des Affaires de la Faculté de Finance, Banque, Comptabilité de l'Université du Droit et de la Santé – Lille 2. Il a été écrit comme base de discussion lors d'un cours. L'université n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans ce document. Ces opinions doivent être considérées comme propres à l'auteur.

$$\text{avec } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{X_0}{K * e^{-r*T}}\right)}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}$$

3. : Facteur d'actualisation pour l'option réelle

Pour un investisseur adverse au risque, $\mu + \frac{\sigma^2}{2} > r$. Et nous pouvons écrire que le facteur d'actualisation est égal au rapport de la valeur présente de l'option réelle et de sa valeur espérée en T.

$$\text{Facteur d'actualisation} = \frac{X_0 * N(d_2 + \sigma\sqrt{T}) - K * e^{-r*T} * N(d_2)}{E(X_T) * N(d + \sigma\sqrt{T}) - K * N(d)}$$

Sa valeur dépend du paramètre μ et donc de la prime de risque présente pour l'actualisation de X .

Les tableaux fournis à l'annexe 1 ont été obtenus en estimant les coûts du capital à partir de ces facteurs d'actualisation :

Soit k , le coût du capital recherché. k vérifie :

$$1/(1+k)^T = \text{Facteur d'actualisation}$$