LES ACTIFS FINANCIERS À TAUX FIXE

QUELQUES CONCEPTS IMPORTANTS

La présentation faite dans ce document n'a d'autres ambitions que de fournir à l'étudiant quelques concepts indispensables dans le domaine de la gestion obligataire. La présentation faite est souvent (abusivement) simplificatrice.

Vocabulaire

- Par titre à revenu fixe ou **obligation**, nous entendons dans ce document un titre possédant les deux caractéristiques suivantes :
  - durée de vie limitée
  - taux d'intérêt nominal certain

- **L'émetteur** d'une obligation est l'emprunteur. Le montant de l'emprunt est le nominal. Si X est le nombre d'obligations émises, $\frac{\text{Montant de l'emprunt}}{X}$ donne la **valeur nominale** de l'obligation.

- **L'acheteur** de l'obligation est le prêteur.

- Les **intérêts** sont payés en fonction d'un taux d'intérêt (le plus souvent exprimé en base annuelle) qui s'applique à la valeur nominale de l'obligation. Leur perception se fait par détachement d'un **coupon**. La périodicité de paiement des intérêts détermine le **mode de composition (**si les intérêts sont payés tous les trois mois, le taux d'intérêt est un taux en composition trimestrielle). La relation suivante permet l'expression d'un taux selon une périodicité de composition en un taux selon une autre périodicité de composition :

$$R_{m2} = \left[\left(1 + \frac{R_{m_1}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right] m_2$$

  où m_1 et m_2 sont les fréquences de paiement des intérêts par an.

- La date de remboursement de l'obligation détermine sa **maturité** (fin de la vie de l'obligation).

- Le **prix** d'une obligation est exprimé en **%** de sa valeur nominale. La **valeur de remboursement** de l'obligation (qui peut être différente de sa valeur nominale) est aussi exprimée en **%** du nominal. Une obligation remboursée **au pair** est une obligation remboursée à 100%. Une obligation remboursée **in fine** est une obligation dont le remboursement s'effectue à la maturité (par opposition à un remboursement par annuités constantes).

- Un obligation matérielle est un document composé d'un **manteau** (qui reprend les caractéristiques de l'obligation : l'émetteur, le taux, le nominal, …) et des **coupons** détachables. Aujourd'hui, la majorité des titres sont dématérialisés et se traitent par inscriptions dans des systèmes informatiques.

Exemples :

1. L'Etat émet le 1 janvier 1998 un emprunt obligataire de 100 milliards remboursables in fine à 103% dans 5 ans, portant un taux d'intérêt annuel de 8%, représenté par 100.000 obligations. Les caractéristiques des obligations sont les suivantes :

- valeur nominale d'une obligation : 1 million
- intérêts : 80.000 fr par an
- valeur de remboursement d'une obligation : 1.030.000 fr
- maturité des obligations : 31/12/2002

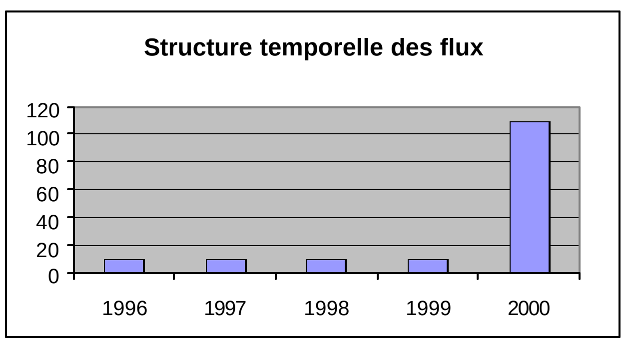
2. Le 16/1/95, une obligation a les caractéristiques suivantes :

- paiement d'un intérêt annuel de 10% de la valeur nominale de l'obligation
- remboursement à 100% à l'échéance (remboursable in fine et au pair)
- maturité : 15/1/2000

La **structure temporelle des flux** de l'obligation est la suivante (on parle **d'obligation linéaire** ou *straight*) :

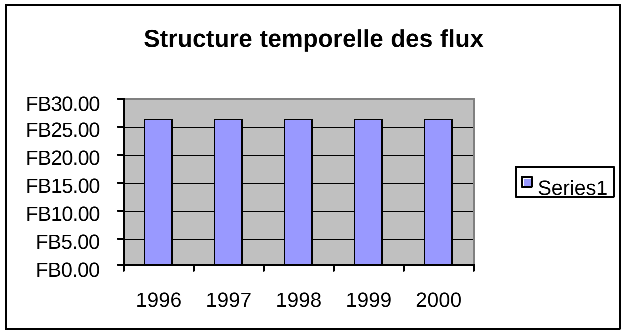
En cas de remboursement par annuité constante, elle serait la suivante :

Nominal	100
Intérêts	10%
Dates	
15/01/96	10
15/01/97	10
15/01/98	10
15/01/99	10
15/01/00	110



On soulignera que l'Etat est bien l'emprunteur : il encaisse le produit de la vente et paye les flux.

Annuité	FB26.38
Dates	
15/01/96	FB26.38
15/01/97	FB26.38
15/01/98	FB26.38
15/01/99	FB26.38
15/01/00	FB26.38



Prix de l'obligation et modèle actuariel

- Le **prix** d'une obligation n'est pas sa valeur nominale. Ainsi, si deux obligations ont une valeur nominale de 1.000 fr et que la première offre un taux annuel de 6% alors que la seconde offre un taux annuel de 8%, ces obligations ne peuvent valoir la même chose.

- Rappelons que les obligations sont cotées en % de leur valeur nominale. La valeur d'une obligation est fonction des cash flows auxquels elle donne droit et de son taux d'intérêt :

$$V = \sum_{i=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+k)^t}$$

où CF_t sont les cash-flows à la période t.

Cette relation actuarielle permet d'établir le lien entre la valeur de l'obligation (V) et son taux de rendement (k). On remarquera au passage que k est bien un taux de rendement interne (TIR). Comme sur le marché, on observe les prix des obligations, on en déduit k. Ce dernier est appelé taux de **rendement à maturité** ou ***yield to maturity*** (ytm dans la littérature financière).

Exemple : Le 16/11/95, une obligation a les caractéristiques suivantes :

- taux d'intérêt : 8%
- remboursement : au pair in fine
- maturité : 15/1/2000

Calculez son ytm pour les prix suivants : 10%, 12% et 8%

La relation entre le prix et le ytm de l'obligation est la suivante :

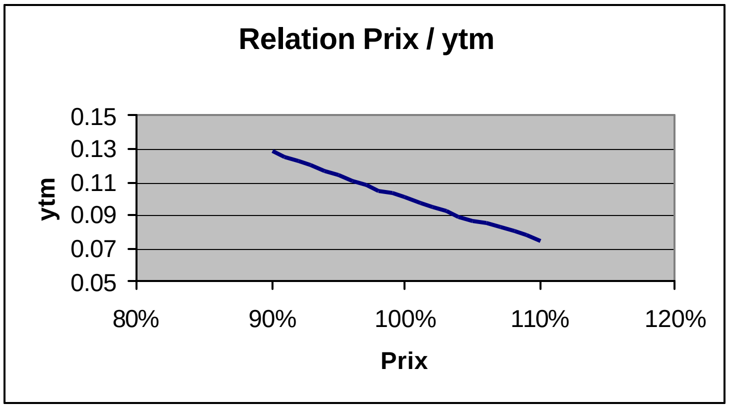
$$P = \frac{10}{(1+ytm)^1} + \frac{10}{(1+ytm)^2} + \ldots + \frac{110}{(1+ytm)^5}$$

Les résultats obtenus sont les suivants :

Prix	*Flux*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*ytm*
100%	-100	10	10	10	10	110	10%
92.80%	-92.8	10	10	10	10	110	12%
108%	-108	10	10	10	10	110	8%

- Remarques

1. La relation entre le **prix et le ytm est inverse** : plus le prix est élevé, plus le ytm (le taux de rendement de l'obligation) est faible.



2. Les obligations **zéro-coupon** sont des obligations qui ne versent pas de coupon. L'intérêt de leur détention est lié à la différence entre le prix d'achat et la valeur de remboursement (le plus souvent, le remboursement est au pair). Comme le ytm est bien un taux interne de rentabilité, les zéro-coupons sont des obligations très intéressantes car le taux d'intérêt que l'on en déduit :
   - ne suppose aucune hypothèse de taux de réinvestissement des flux intermédiaires;
   - ne supporte pas le risque lié à la variation possible de ce taux de réinvestissement.

   Il s'agit donc d'un taux d'intérêt "pur".
   Exemple : un titre zéro-coupon, à capitalisation annuelle, est coté à 68.06%. Il est remboursable au pair dans 5 ans. Quel est son ytm ?

$$68.06 = \frac{100}{(1+ytm)^5} \Rightarrow ytm = 8\%$$

3. Le ytm est calculé en période de **composition des intérêts**. Pour réexprimer le taux obtenu en fonction d'une autre périodicité de composition, on utilisera la relation suivante :

$$R_{m2} = \left[\left(1+\frac{R_{m_1}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}} - 1\right] m_2$$

4. Pour calculer le prix effectivement payé par l'acheteur d'un titre au vendeur, il faut tenir compte des **intérêts courus**. Il s'agit des intérêts auxquels à droit le vendeur compte tenu du moment où la vente est effectuée. Ce problème survient lorsque la

date où la transaction de vente effectuée n'est pas une date de détachement des coupons. Le prix payé par l'acheteur est alors déterminé de la manière suivante :

$$DP = CP + IC$$

où DP est le Dirty Price, CP est le Clean Price et IC sont les intérêts intérêts courus. Le prix de l'obligation affiché sur le marché est le Clean Price (prix hors intérêts courus). Le prix payé est le Dirty Price. Les intérêts courus sont déterminés à l'aide d'une simple règle de trois en fonction du nombre de jours écoulés depuis le dernier détachement de coupon :

$$\frac{\text{Nombre de jours courus depuis le dernier détachement}}{\text{Nombre de jours entre deux détachements de coupons}} \times \text{valeur du coupon}$$

Le calcul du nombre de jours est fonction de la **base** en vigueur sur le marché (certains marchés considère qu'un mois fait toujours 30 jours et une année fait 360 jours. La base est alors $\frac{30}{360}$).

Prix théorique de l'obligation

Le prix de l'obligation que l'on observe sur le marché est-il le "bon" prix ? La réponse à cette question suppose que l'on définisse la notion de "bon" prix ou prix théorique de l'obligation.

- Hypothèses :
  - les intérêts sont payés annuellement
  - l'évaluation de l'obligation est faite juste après détachement du coupon (IC=0)
  - on peut prêter ou emprunter, à chaque échéance d'un flux de l'obligation, le flux correspond sur le marché monétaire

- Notations :
  - T : maturité de l'obligation
  - CF_t : cash-flow de l'obligation à la période t
  - $S(t_O,t_1)$: taux d'une obligation zéro-coupon acquise aujourd'hui et remboursée en t_n

- L'évaluation (la détermination du prix théorique) repose sur une opération **d'arbitrage**. Une telle opération est une opération telle que l'investisseur ne fait aucun investissement et ne prend aucun risque. Elle ne peut avoir comme taux de rentabilité que 0 (sinon, vous seriez instantanément infiniment riche …). Pour évaluer une obligation, nous construisons le **portefeuille d'arbitrage** suivant :
  - achat d'une obligation
  - financement de l'achat par des emprunts dont la maturité et les montants correspondent aux CF de l'obligation achetée

  Le portefeuille constitué est bien sans risque : chaque CF permet de rembourser les emprunts effectués (nous supposons que le risque de défaut est nul). Il est également bien sans investissement : le prix est payé est égal à la somme de montant empruntés. Si le marché se caractérise par l'absence d'opportunités d'arbitrage, le prix payés doit donc respecter la relation suivante :

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{CF_t}{(1+ytm)^t} = \frac{CF_1}{(1+S(t_O,t_1))} + \frac{CF_2}{(1+S(t_O,t_2))} + ... + \frac{CF_T}{(1+S(t_O,t_T))}$$

où le premier terme représente le prix observé sur le marché, le deuxième permet d'obtenir le ytm correspondant et le troisième représente la valeur actuelle aux taux zéro-coupons des emprunts effectués. Si la relation n'est pas respectée, une opération d'arbitrage est possible. Imaginons par exemple que la valeur actuelle des emprunts est plus grande que le prix de l'obligation. J'emprunte immédiatement et j'achète l'obligation. Avec les flux de l'obligation, je rembourserai les emprunts. La différence entre la valeur actuelle des emprunts et le prix payé pour l'obligation me revient, sans aucun risque …

On notera enfin que cette relation montre que le ytm est une "sorte" de moyenne des taux zéro-coupons :

$$\sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+ytm)^t} = \frac{1}{(1+S(t_O,t_1))} + \frac{1}{(1+S(t_O,t_2))} + ... + \frac{1}{(1+S(t_O,t_T))}$$

Evaluation du risque d'un obligation

- Pour évaluer le risque d'une obligation, l'un des indicateurs que l'on utilise est la **duration**. Pour introduire ce concept, nous allons toutefois tout d'abord montrer qu'il s'agit d'une durée de vie moyenne de l'obligation pondérée par la valeur actuelle des flux intermédiares (duration de Macauley, 1938) :

$$D = \sum_{t1}^{T} w_t \times t$$

$$\text{où} \quad w_t = \frac{\dfrac{CF_t}{(1+ytm)^t}}{\sum_{t=1}^{T} \dfrac{CF_t}{(1+ytm)^t}} = \frac{\dfrac{CF_t}{(1+ytm)^t}}{P}$$

On remarquera que si l'obligation est une zéro-coupon, sa duration est bien entendu égale à sa maturité.

La duration est bien un indicateur de **risque**. Elle a un lien directe avec la **dérivée du prix de l'obligation par rapport au ytm**, comme le montre le raisonnement suivant en composition continue :

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{CF_t}{e^{ytm\times t}}=\sum_{t=1}^{T}CF_t e^{-ytm\times t}\quad \text{(en composition continue)}$$

$$\frac{\partial P}{\partial ytm}=-\sum_{i=1}^{T}CF_t e^{-ytm\times t}t$$

sachant que, en composition continue, $D=\frac{\sum_{t}^{T}\frac{CF_t}{e^{ytm\times t}}\times t}{P}$, on en déduit :

$$\frac{\partial P}{\partial ytm}=\frac{-\sum_{i=1}^{T}CF_t e^{-ytm\times t}t}{P}P=-DP$$

Cela implique notamment que la duration est une mesure de l'impact d'une variation du ytm sur le prix de l'obligation :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{ytm}}=-DP\Leftrightarrow\frac{\partial P}{P}=-D\partial ytm$$

En composition discrète, la relation entre la duration et la dérivée du prix de l'obligation est la suivante :

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{ytm}}=-\frac{DP}{1+ytm}$$

La duration a donc bien un lien direct avec la dérivée du prix de l'obligation par rapport au ytm. Plus intuitivement, le raisonnement est le suivant. Lorsque le ytm augmente, cela a deux conséquence :

- le prix de l'obligation baisse (nous l'avons vu ci-dessus). L'investisseur enregistre donc une moins-value
- les flux intermédiaires futurs (les coupons) seront par contre réinvestis à un taux plus intéressants (les taux d'intérêts ayant augmenté). L'investisseur enregistrera donc de ce point de vue une plus-value.

La duration est la période de temps nécessaire pour que, suite à une variation du ytm de 1% (chaque parallèle sur la structure à terme des taux d'intérêt), les effets se compensent : la moins-value enregistrée initialement se compense par les plus-values sur les replacements à taux plus intéressant. En d'autre terme, la duration mesure (de manière locale, nous y reviendrons)

On comprend dès lors aisément qu'un investisseur qui anticipe une hausse des taux recherche des obligations à duration faible (la moins-value enregistrée sera faible) et inversement.

On notera enfin que la **duration d'un portefeuille** est la moyenne pondérée des durations des actifs qui le compose, les coefficients de pondération étant proportionnels aux prix des actifs qui composent le portefeuille.

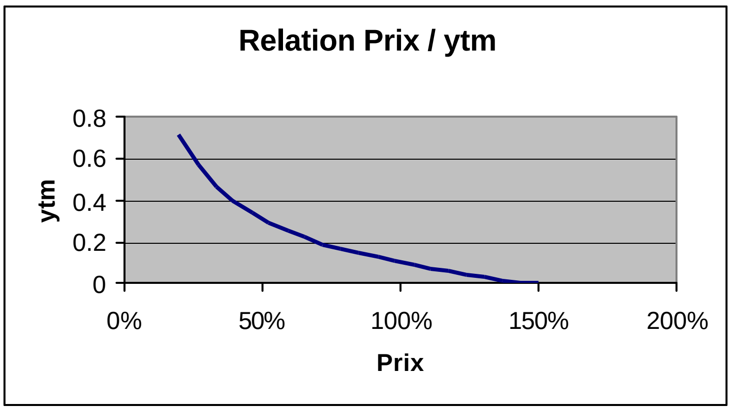
- La duration modifiée

En repartant de l'analyse de la relation entre la duration et la dérivée du prix de l'obligation par rapport au ytm, on se rend compte que (en composition discrètre), cette dérivée peut s'écrire comme suit :

$\frac{\partial P}{\partial ytm} = -\frac{D}{1+ytm}P$. L'expression $\frac{D}{1+ytm}$ est appelée duration modifiée, qui est une expression directe de la dérivée du prix de l'obligation par rapport au ytm.

- Convexité de la relation prix / ytm :

La relation entre le prix d'une obligation et le ytm n'est pas linéaire. En reprenant le graphique proposé à la section précédante et en augmentant la place de valeur des prix de l'obligation, on obtient la figure suivante :



La relation est bien convexe. La duration (et la duration modifiée) ne sont donc que des mesures locales du risque.