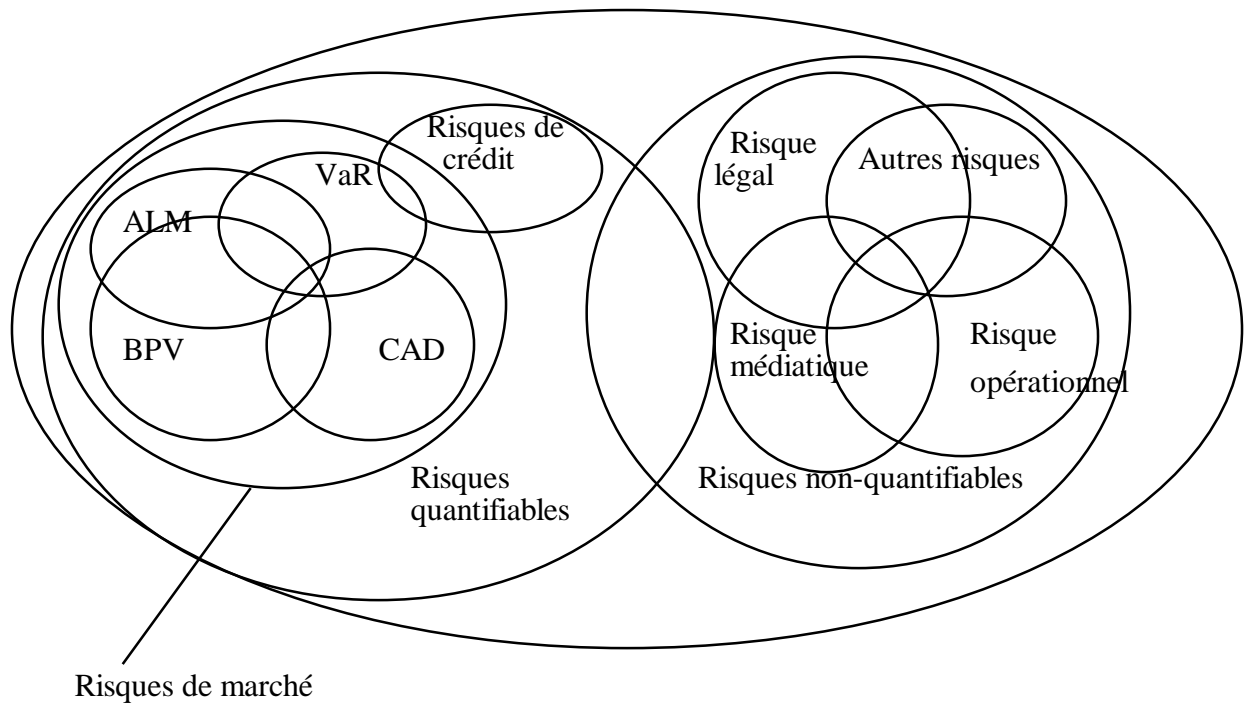




Value at Risk

Les risques bancaires



Value at Risk - VaR

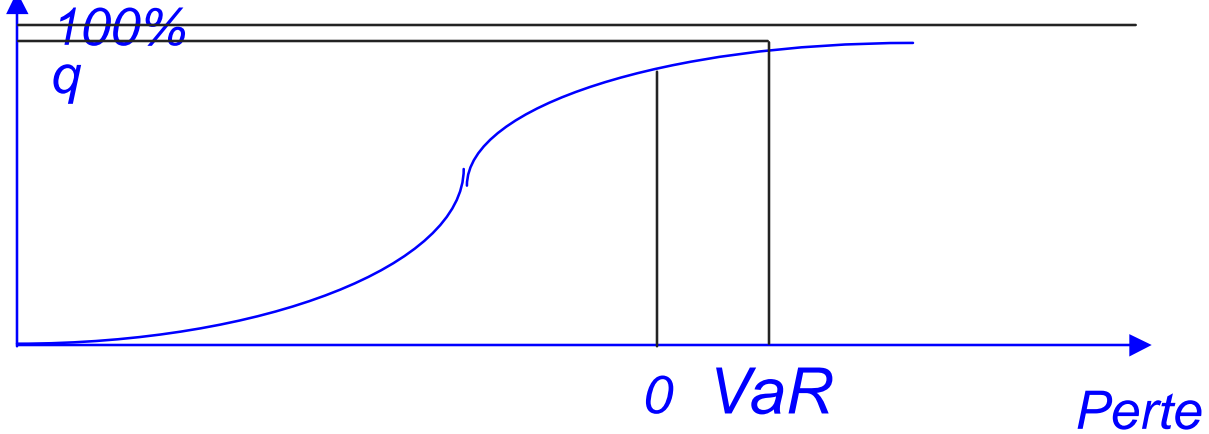
La Value at Risk d'un actif pour la durée t et le niveau de probabilité q se définit comme le montant tel que la perte encourue sur cet actif pendant la durée de 0 à t ne dépassera VaR qu'avec une probabilité de $1-q$, c'est-à-dire:

Probabilité (perte $>$ VaR) = $1-q$

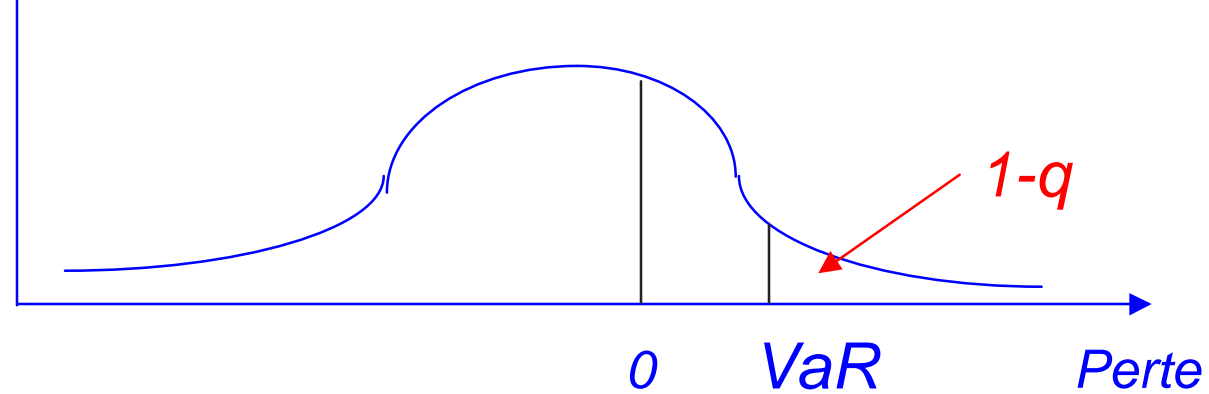
ou Probabilité (perte \leq VaR) = q

Value at Risk - VaR

Probabilité cumulée



Probabilité d'un certain montant de perte

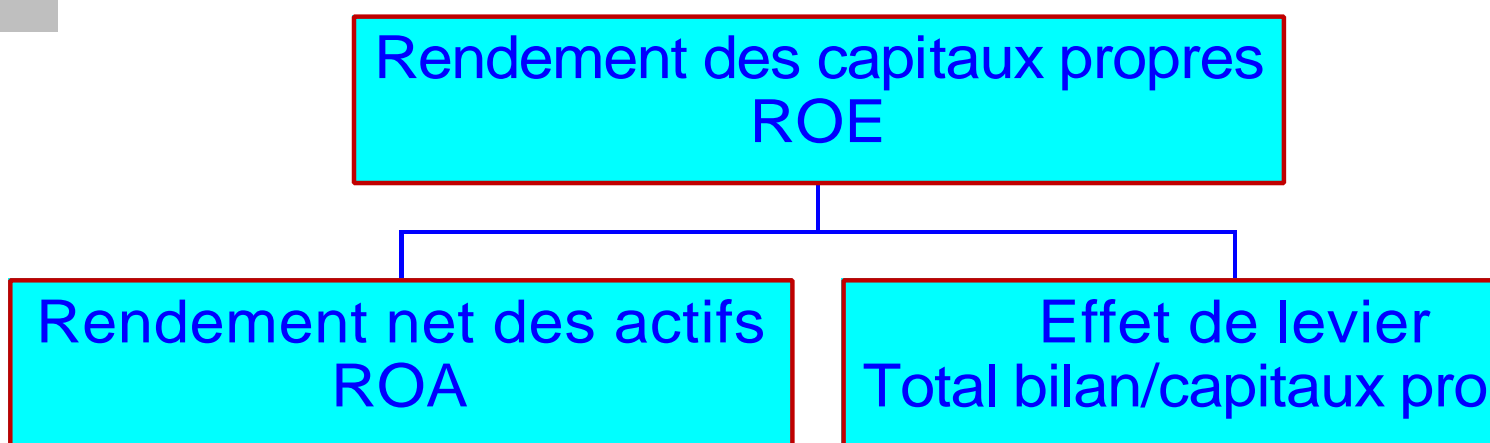


Value at Risk - VaR

Si la VaR à 99% d'un actif est égale à 1 million pendant la période de 0 à t, ce signifie qu'il y a 99 chances sur 100 que pour cette période, la perte sur cet actif ne dépasse pas 1 million.

Rentabilité

L'"ancienne" vision de la rentabilité



Capitaux Propres

- **“Capital réglementaire”** (=“Regulatory Capital”): Accord de juillet 1988 du “Basel Committee on Bank Supervision” (Banque pour les Règlements Internationaux-BRI).
- Le Tier 1 (capital libéré + réserves disponibles) $\geq 8\%$ du montant total des encours pondérés.

Capital Economique

“Capital économique”: capitaux propres requis après l’application d’une méthode “économique”. Le “capital économique” est le montant de capitaux propres suffisant pour absorber les pertes prévisibles à un certain niveau de probabilité.

Capital réglementaire: ex en crédi

Types d'actifs	Poids
Liquidités	0%
Prêts interbancaires	20%/100
Prêts aux pouvoirs publics, banques centrales,...	0,10,20,4 ou 100%
Autres prêts	100%

Capital réglementaire: ex en crédi

- Un prêt à Petrofina de 100 est financé par 92 de dépôts et 8 de capital réglementaire.
- Un prêt à la PME X de 100 est aussi financé par 92 de dépôts et 8 de capital réglementaire.

Capitaux Propres

- Capital réglementaire:
 - externe
 - arbitraire
 - trompeur
- Capital économique:
 - interne
 - décision de la direction
 - tient compte de l'attitude vis-à-vis du ris

Une nouvelle approche des risques financiers

- Les fonds propres consommés par une opération sont la perte maximale probable dans un intervalle de confiance déterminé.
- Tous les risques financiers justifient un adossement de fonds propres.

Rentabilité

L'évaluation de la rentabilité des centres de profit peut alors se faire sur la base des risques encourus, ce sont les ratios RORAC (Return on Risk Adjusted Capital) ou RAROC (Risk Adjusted Return on Capital).

Exemple de RORAC

	<i>A</i>	<i>B</i>
■ Montant du crédit	1000	1000
■ Fonds Propres économiques	40	100
■ Résultat brut d'exploitation	20	40
■ Provisions ex-ante (a priori)	(8)	(3)
■ Résultat net d'exploitation	12	8
■ Raroc (en %)	30	5

Méthodologie

Le risque provient d'une incertitude quant à un résultat attendu.

- Il se mesure en termes probabilistes
- Par défaut, on considère que la distribution de probabilités suit une loi simple (réaliste ?)

Méthodologie

Le risque de crédit est mesuré par de paramètres

- L'espérance mathématique ou "risque moyen"
- L'écart-type représentatif de la volatilité

Méthodologie

Un intervalle de confiance doit être choisi (par exemple 95%)

- pour une loi de distribution normale (réaliste ?), il y correspond la prise en compte de 1.65 écart-type
- on l'appellera l'aversion au risque

Méthodologie

- En matière de risques de marché, la mesure du risque passe par la connaissance de deux éléments: la position et la volatilité.
- Deux hypothèses de travail doivent être posées sur la volatilité:
 - la durée de détention des positions
 - la période d'observation des données nécessaires au calcul de la volatilité

Méthodologie

Actions et FX : Risque = exposition * volatilité

Taux : Risque = flux * sensibilité (discount factor) * volatilité

$$(\text{RisqueTaux})^2 = \begin{pmatrix} \text{Exp}_1 & \text{Exp}_2 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1^2 & \mathbf{s}_{12}^2 \\ \mathbf{s}_{21}^2 & \mathbf{s}_2^2 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \text{Exp}_1 \\ \text{Exp}_2 \end{pmatrix} \text{ ou}$$

$$(\text{RisqueTaux})^2 = \begin{pmatrix} \text{Risque}_1 & \text{Risque}_2 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{r}_{21} & 1 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} \text{Risque}_1 \\ \text{Risque}_2 \end{pmatrix}$$

Risque et Variance d'un portefeuille

Variance d'un portefeuille composé des actifs i et j

$$\sigma_p^2 = P_i^2 * \sigma_i^2 + P_j^2 * \sigma_j^2 + 2 * P_i * P_j * \sigma_i * \sigma_j * r_{ij}$$

où P_i = poids de l'actif i dans le portefeuille

où P_j = poids de l'actif j dans le portefeuille

$$P_i + P_j = 1$$

Etant donné que $r_{ij} \leq 1$, $\sigma_p^2 \leq (P_i * \sigma_i + P_j * \sigma_j)^2$

Risque et Variance d'un portefeuille

- Ecart-type (= risque) d'un portefeuille composé de deux actifs i et j $s_p = \sqrt{s_p^2} \leq (P_i * s_i + P_j * s_j)$

- Example: \$ based portfolio, long 10yr Bund position

Amount: DM 160 million FX Rate:\$/DM=1.60

Bond volatility:0.999% FX volatility:0.932%

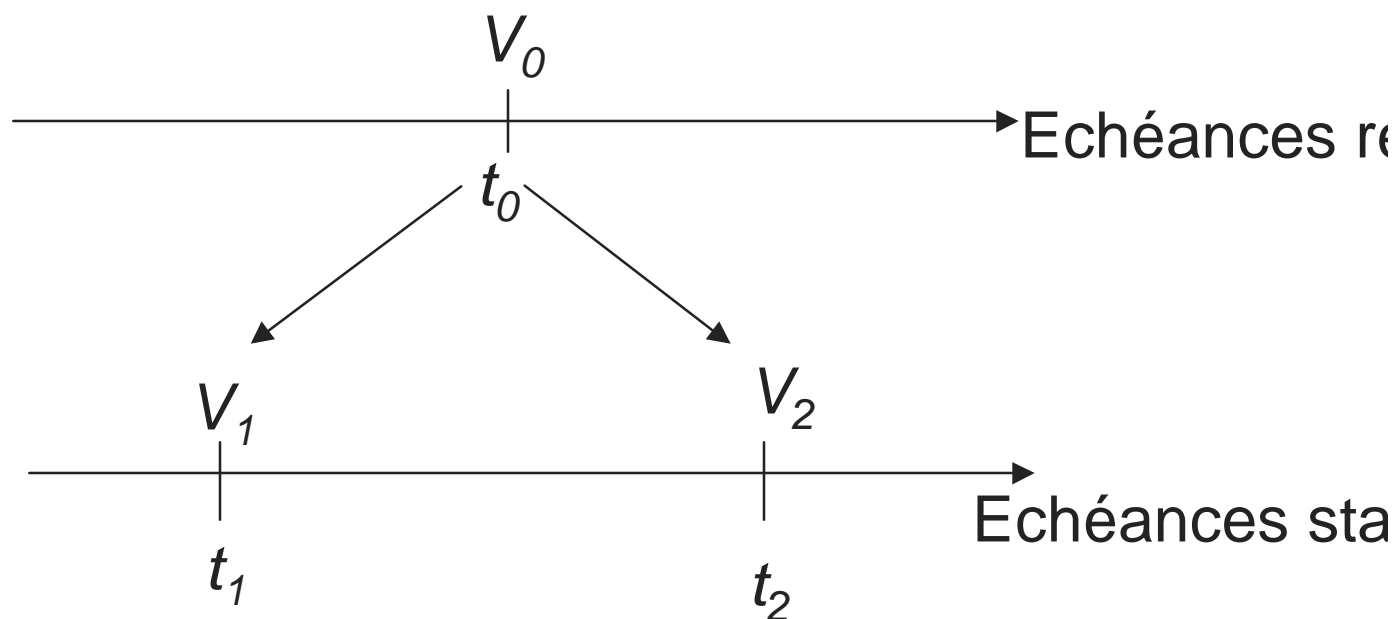
Price correlation: -0.27 =1.65 écart-type

DM interest rate risk=DM 160M/1.60*0.999%=\$999000

DM currency risk=DM 160M/1.60*0.932%=\$932000

$$Risk = \sqrt{(0.999)^2 + (0.932)^2 - (2 * 0.27 * 0.999 * 0.932)} = \$1.17M$$

Mapping des cash-flows



Décomposition en cash flows

Une obligation d'échéance 02/t+10 achetée en mai de l'année t à 109.70 pour 100.000 de nominal. Le coupon est de 8.25% et le zero yield est de 7.098%.

Date	Flow	Maturity	Present Value
02/t+1	8250	0.784	7814
02/t+2	8250	1.784	7304
02/t+3	8250	2.786	6820
02/t+4	8250	3.786	6368
....
02/t+10	108250	9.789	55372

Statistiques

$$s(t) = s(1) * t$$

Cette règle facilite les choses lorsque les historiques sont par défaut. Si X suit une marche aléatoire:

$$X(t) = X(t-1) + e(t) \text{ où}$$

$e(t)$ est un bruit blanc i.e.

de moyenne nulle;

de variance constante σ^2

et est également non-corrélé

(indépendance des e entre eux)

Statistiques

$$X(t) = X(0) + e(t) + e(t-1) + \dots + e(2) + e(1)$$

$$\Rightarrow E(X(t)) = X(0);$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}^2(X(t)) = E((X(t) - X(0))^2);$$

$$\Rightarrow \mathbf{s}^2(X(t)) = E[(e(t) + e(t-1) + \dots + e(2) + e(1))^2]$$
$$= t * \mathbf{s}^2$$

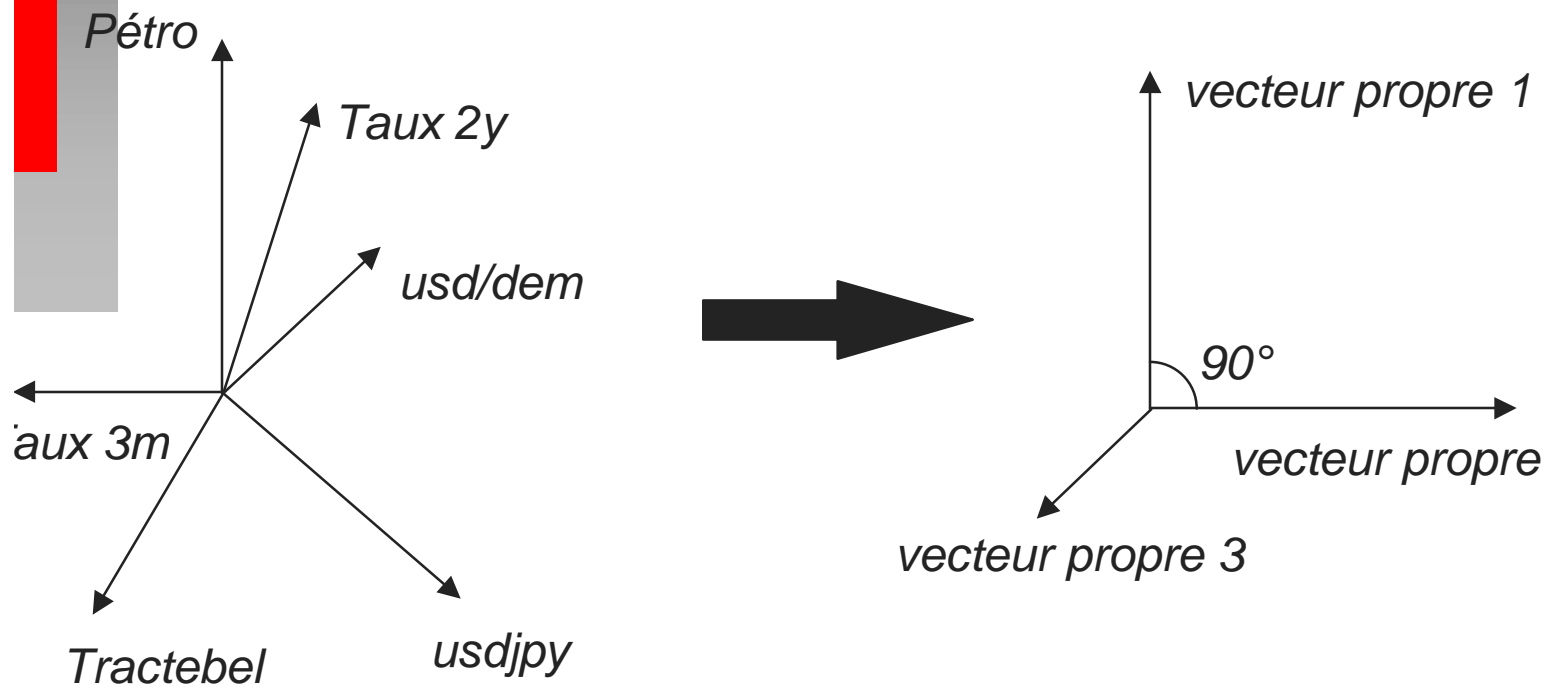
Les méthodes VaR

- **La méthode historique:** le calcul de la VaR nécessite de calculer la valeur du portefeuille pour chacun des jours de la période correspondant à l'historique choisi.
- **La méthode de Monte-Carlo** permet de générer des valeurs de variables aléatoires dont la loi de probabilité est connue. Cette méthode nécessite d'importantes capacités de calcul et de simulation
 - M = nombre de simulations nécessaires pour obtenir une distribution représentative;
 - n = nombre de facteurs de risque affectant l'actif
 - alors, il faut $M * n$ simulations au total pour cet actif

Les méthodes VaR

- La méthode des corrélations (et les composantes principales):
 - le risque du portefeuille sera moindre grâce à la diversification
 - inconvénients:
 - *la taille de la matrice des variances-covariances*
 - *l'hypothèse de linéarité entre le prix de l'actif et ses facteurs de risque*

Les composantes principales



Les composantes principales

- L'idée est de trouver des facteurs
 - qui ne dénaturent pas l'information contenue dans la matrice variance-covariance
 - mais qui sont indépendants
- La méthode des composantes principales permet d'obtenir ces facteurs
 - c'est une méthode purement mathématique
 - qui donne ces facteurs (les vecteurs propres)
 - ordonnés par importance décroissante (les valeurs propres)
- L'avantage est de pouvoir expliquer la même information avec moins de données
 - l'ordonnement des facteurs fait qu'un facteur explique toujours moins que le précédent
 - il arrive un moment où le signal est suffisamment cerné pour être valide

Hypothèses habituelles

- La distribution normale des différences de prix de actifs ➡ la VaR peut être calculée facilement à la moyenne et l'écart-type de la distribution du résultat + stationnarité de ces paramètres ?
- L'utilisation de différences soit relatives, soit norm + lissage des données ?
- Le réalisme de la période de détention.
- La linéarité du prix des actifs en fonction des facteurs de risque est essentielle à la méthode variances-covariances contrairement aux autres méthodes.
Cette hypothèse est à la base du principe de décomposition des actifs en cash-flows. Quid des options ?

Méthodologie

Parmi les produits dérivés, les options sont les produits dont le risque est le plus difficile à caractériser. Le prix d'une option varie de manière non-linéaire en fonction des variables suivantes:

- la valeur du sous-jacent,
- la volatilité,
- la durée de l'option,
- le taux d'intérêt.

Méthodologie

Outre les options traitées sur marché organisé (EOE, Matif, Liffe,...) ou de gré à gré (over the counter), les banques doivent faire face aux options cachées:

- les remboursements anticipés,
- les périodes de prélèvements sur crédits à LT,
- les périodes de souscription (prise ferme)

Méthodologie

La méthode des variances-covariances, contrairement à Monte-Carlo et à l'analyse historique, s'appuie explicitement sur l'hypothèse de linéarité du prix des actifs en fonction des facteurs de risque. Cette hypothèse est à la base du principe de décomposition des actifs en cash-flows.

Cette hypothèse est erronée pour les options. On peut alors chercher à "linéariser l'option" en tenant compte d'une décomposition en "delta équivalent" et du rho.

Delta équivalent / Rho

Cash-flow delta équivalent =
delta de l'option * cours du sous-jacent

Cash-flow rho:

ce cash-flow a la même sensibilité à un mouvement
taux que le prix de l'option

$V_{CF} = CF_t / (1+r_t)^t$ d'où sa sensibilité à un mouvement de r
 $\partial V_t / \partial r_t = -CF_t * t / (1+r_t)^{t+1} = \text{rho}$ et donc

$$F_t = \left[-rho * (1+r_t)^{t+1} \right] / t$$

où r_t est le taux zéro-coupon de la période t .

Vega

Vega est la sensibilité du prix de l'option à un mouvement (1% par exemple) de la volatilité

Ce mouvement de 1% est-il réaliste ?

=> calculer des volatilités de volatilités

=> disposer d'historiques de volatilités

(quid des options far OTM, far ITM, illiquides

On peut alors arriver à plus ou moins bien estimer la perte potentielle probable d'un jour l'autre.

Méthodologie

Une approche alternative à la “full revaluation” pour les produits optionnels consiste à se limiter à une analyse des premiers termes du développement en série de Taylor:

- les deux premiers ordres pour les variations de prix liées à une variation du sous-jacent (le Delta (équivalent delta) et le Gamma)
- le premier ordre pour les variations de prix liées à une variation de la volatilité (le Vega)

Méthodologie

Pour une option sur taux d'intérêt, on constate que l'aversion au risque donnée par le nombre d'écart-types intervient à la puissance 4 au niveau de la sensibilité du prix de l'option. Ce résultat résulte de la combinaison de deux effets de second ordre: la convexité du sous-jacent et gamma de l'option. Ceci explique le danger de vendre des options à découvert.

$$\Delta P = -ModDur * P * \Delta i + 1/2 convexité * \Delta i^2 * P$$
$$\Delta O = d * \Delta P + 1/2 g * \Delta P^2 + u * \Delta S$$

Back Testing

= compararison entre la VaR calculée et la variation de mark-to-market des positions de la veille (ex post)

- intervalle de confiance de 95% ou 99%
- période de détention de 1 à 10 jours
- sur les positions de la veille
- classification en “zones de couleur”

Stress Testing

Par définition, un modèle VaR est un modèle statistique qui suppose que le passé donne la meilleure information quant aux futures variations des facteurs de risque.

Il existe néanmoins un certain nombre d'événements qui sortent de la normalité des observations passées. Un modèle VaR ne peut appréhender de tels événements. Il faut alors procéder à des tests d'hypothèses extrêmes, c'est le "stress testing".

Recommandations B.R.I.

- Mapping:
 - au moins 6 buckets par courbe de taux
 - les actions individuelles sont prises en bêta équivalent
- Volatilité: la volatilité est exprimée en écart-type d'une distribution normale. Chaque donnée a un poids égal. D'autres méthodes sont permises si l'historique utilisé est d'au moins un an. L'estimation de la volatilité doit être renouvelée au moins chaque trimestre.
- Intervalle de confiance: 99% (2.32 écart-type 10 jours ouvrables).

Recommandations B.R.I.

- Options: le risque gamma et vega doivent être pris en compte.
- Back testing: Le résultat du back testing doit se situer en zone verte pour bénéficier de l'allocation fonds propres la plus favorable:

Zone	Nbre d'erreurs	Facteur
verte	0 à 4	3
jaune	5 à 9	3.4 à 3.85
rouge	10 ou plus	4

Nouvelles problématiques

- L'appréhension du risque spécifique : émetteur obligataire (risque de spread)
- L'application des techniques VaR au domaine du crédit.
- Impact de l'Euro, notamment sur les historiques.